# Infinito tra filosofia e matematica

Umberto Bottazzini

Università degli Studi di Milano

Bergamo, 29 Novembre 2019

# Da Nietzsche, *La gaia scienza*

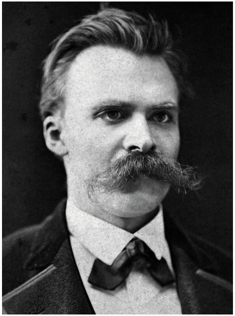
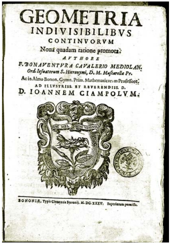


Figure: Friedrich Nietzsche (1844–1900)

"Abbiamo lasciato terra, e siamo saliti sulla nave! Abbiamo i ponti dietro di noi; di più, abbiamo reciso ogni legame con la terra alle nostre spalle! E adesso, navicella, guarda avanti! Accanto a te c'è l'oceano, è vero, non sempre muggisce, e ogni tanto se ne sta là come seta e oro e fantasticherie di bontà. Ma verranno ore in cui ti accorgerai che è infinito e che non c'è niente di più terribile dell'infinità"

# L'immenso oceano dell'infinito

Figure: Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



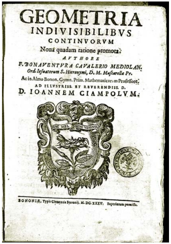
GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore;
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

- Avventurarsi nell'oceano degli infiniti nell'oceano degli infiniti è la metafora suggerita ai matematici del Seicento dalle imprese dei grandi navigatori, che hanno solcato gli oceani per esplorare nuovi continenti.

# L'immenso oceano dell'infinito

Figure: Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



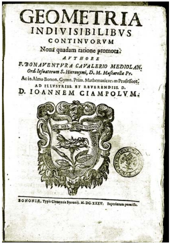
GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore;
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

- Avventurarsi nell'oceano degli infiniti nell'oceano degli infiniti è la metafora suggerita ai matematici del Seicento dalle imprese dei grandi navigatori, che hanno solcato gli oceani per esplorare nuovi continenti.
- Quando riceve una copia dei *Discorsi* (1638) Cavalieri saluta in Galileo il maestro che "con la scorta della buona geometria e con la tramontana del suo altissimo ingegno ha potuto felicemente navigare l'immenso oceano degli indivisibili, de' vacui, de gl'infiniti".

# L’immenso oceano dell’infinito

Figure: Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore.
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.
BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

- Avventurarsi nell’oceano degli infiniti nell’oceano degli infiniti è la metafora suggerita ai matematici del Seicento dalle imprese dei grandi navigatori, che hanno solcato gli oceani per esplorare nuovi continenti.
- Quando riceve una copia dei *Discorsi* (1638) Cavalieri saluta in Galileo il maestro che “con la scorta della buona geometria e con la tramontana del suo altissimo ingegno ha potuto felicemente navigare l’immenso oceano degli indivisibili, de’ vacui, de gl’infiniti”.
- Lo stesso Cavalieri, nella *Geometria indivisilibus* può condurre in porto, non la navicella di Nietzsche, ma il suo “battello che ha percorso l’oceano della infinità degli indivisibili” evitando il pericolo di “mettersi a repentaglio negli scogli di quella infinità”.

# L'Oceano dell'infinito negli *Elements de Géométrie* di Fontenelle

Figure: Bernard Le Bovier de Fontenelle (1657–1757)

L'immagine dell'oceano compare anche negli *Elements de la géométrie de l'infini* (1727) pubblicati in forma anonima, ma in realtà opera di Fontenelle.

ELEMENTS
DE LA
GEOMETRIE
DE
L'INFINI.

SUITE DES MEMOIRES
de l'Academie Royale des Sciences.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXXVII.

# Dagli *Elements de géométrie* di Fontenelle

- C'è un infinito metafisico che  proprio di "una grandezza senza limiti in ogni senso, che comprende tutto e fuori dalla quale non c'è nulla". Tutt'altra cosa, molto diversa, è l'infinito che si considera in geometria, l'infinito geometrico: è "una grandezza più grande di ogni grandezza finita, ma non più grande di ogni grandezza", sostiene Fontenelle. A suo dire, "questa definizione consente che ci siano infiniti più piccoli o più grandi di altri infiniti".

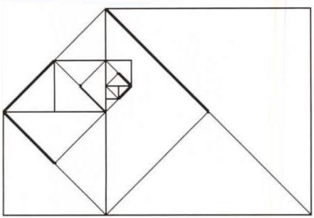
# Dagli *Elements de géométrie* di Fontenelle

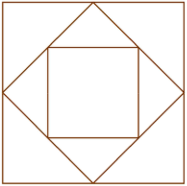
- C'è un infinito metafisico che  proprio di "una grandezza senza limiti in ogni senso, che comprende tutto e fuori dalla quale non c'è nulla". Tutt'altra cosa, molto diversa, è l'infinito che si considera in geometria, l'infinito geometrico: è "una grandezza più grande di ogni grandezza finita, ma non più grande di ogni grandezza", sostiene Fontenelle. A suo dire, "questa definizione consente che ci siano infiniti più piccoli o più grandi di altri infiniti".
- L'infinito geometrico si presenta fin dai primi passi, e pervade tutta la geometria, per la buona ragione che "dà luogo agli incommensurabili il cui numero è infinitamente più grande dei commensurabili".

# Dagli *Elements de géométrie* di Fontenelle

- C'è un infinito metafisico che  proprio di "una grandezza senza limiti in ogni senso, che comprende tutto e fuori dalla quale non c'è nulla". Tutt'altra cosa, molto diversa, è l'infinito che si considera in geometria, l'infinito geometrico: è "una grandezza più grande di ogni grandezza finita, ma non più grande di ogni grandezza", sostiene Fontenelle. A suo dire, "questa definizione consente che ci siano infiniti più piccoli o più grandi di altri infiniti".
- L'infinito geometrico si presenta fin dai primi passi, e pervade tutta la geometria, per la buona ragione che "dà luogo agli incommensurabili il cui numero è infinitamente più grande dei commensurabili".
- Si racconta, egli continua, che nei Paesi bassi grandi distese di terra sono state ricoperte dal mare, e solo le punte dei campanili sparse qua e là emergono dall'acqua. "È pressappoco così che l'Oceano dell'infinito ha sommerso tutti i numeri e tutte le grandezze e non restano che quelle commensurabili che noi possiamo conoscere perfettamente".

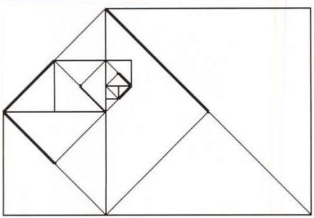
# Grandezze incommensurabili, I

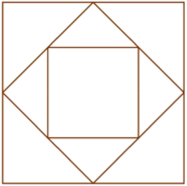




- Su metà diagonale si può costruire un quadrato che è la metà del quadrato di partenza. La costruzione è geometricamente sempre possibile, come è sempre possibile bisecare un segmento.

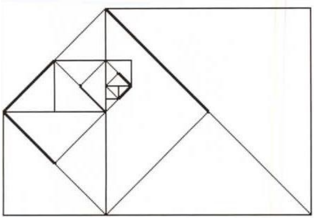
# Grandezze incommensurabili, I

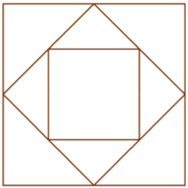




- Su metà diagonale si può costruire un quadrato che è la metà del quadrato di partenza. La costruzione è geometricamente sempre possibile, come è sempre possibile bisecare un segmento.
- Reiterando indefinitamente il procedimento, si ottiene una successione di quadrati, nella quale i successivi quadrati sempre più piccoli si dispongono a spirale su quello di partenza

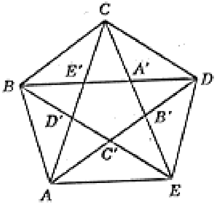
# Grandezze incommensurabili, I





- Su metà diagonale si può costruire un quadrato che è la metà del quadrato di partenza. La costruzione è geometricamente sempre possibile, come è sempre possibile bisecare un segmento.
- Reiterando indefinitamente il procedimento, si ottiene una successione di quadrati, nella quale i successivi quadrati sempre più piccoli si dispongono a spirale su quello di partenza
- Analoga successione telescopica di quadrati si genera congiungendo i punti medi dei lati di un quadrato e reiterando indefinitamente il procedimento. È la costruzione suggerita dal passo del *Menone* di Platone

# Grandezze incommensurabili, II



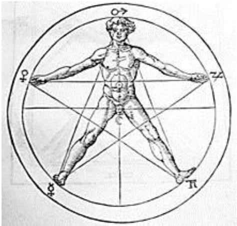



Figure: Da Cornelius Agrippa, *De occulta philosophia* (1531)

Reiterando indefinitamente il procedimento si ottiene una successione telescopica di pentagoni regolari sempre più piccoli. In ciascuno degli infiniti pentagoni della successione il rapporto tra le diagonali e i lati è sempre lo stesso, dato dal cosiddetto numero aureo

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

Figure: André (1906-1998) e Simone (1909-1943) Weil

"Il fatto che vi siano rapporti che non sono nominabili" e per i Pitagorici "nominabile è un rapporto tra numeri interi, che vi siano stati dei *logoi alogoi*, l'espressione stessa è tanto sconvolgente che non posso credere che in un'epoca così drammatica nella sua essenza, e che ha conosciuto e provato a tal punto l'angoscia, un fatto così straordinario abbia potuto essere preso per una semplice scoperta scientifica"

Figure: André e Simone Weil

- *André a Simone*: La grande importanza attribuita alla proporzione "suggerisce che agli inizi del pensiero greco si sia avuto un sentimento della sproporzione tra il pensiero e il mondo (e, come dici tu, fra l'uomo e Dio) di un'intensità tale che hanno avuto bisogno di gettare ad ogni costo un ponte al di sopra di quell'abisso". Nietzsche "ha meditato più di ogni altro sul pensiero greco arcaico"

# André e Simone Weil: lettere dal e al carcere nel 1940

Figure: André e Simone Weil

- *André a Simone*: La grande importanza attribuita alla proporzione "suggerisce che agli inizi del pensiero greco si sia avuto un sentimento della sproporzione tra il pensiero e il mondo (e, come dici tu, fra l'uomo e Dio) di un'intensità tale che hanno avuto bisogno di gettare ad ogni costo un ponte al di sopra di quell'abisso". Nietzsche "ha meditato più di ogni altro sul pensiero greco arcaico"
- *Simone a André*: "Non posso sopportare Nietzsche; mi esaspera, persino quando esprime cose che penso"

# Ancora André e Simone Weil: lettere dal e al carcere nel 1940

L'irruzione dell'infinito sconvolse l'armonia numerica del mondo dei Pitagorici.

- André: "Ciò che rende oltremodo originale la matematica greca è forse il fatto che non esiste l'approssimazione: questo ha ucciso il numero a vantaggio del *logos* (è tutto qui il dramma della scoperta degli irrazionali)".

# Ancora André e Simone Weil: lettere dal e al carcere nel 1940

L'irruzione dell'infinito sconvolse l'armonia numerica del mondo dei Pitagorici.

- André: "Ciò che rende oltremodo originale la matematica greca è forse il fatto che non esiste l'approssimazione: questo ha ucciso il numero a vantaggio del *logos* (è tutto qui il dramma della scoperta degli irrazionali)".
- "Certo, c'è stato un dramma di portata immensa – ribatte Simone. La divulgazione della scoperta ha gettato sulla nozione di verità un discredito che dura tuttora" innescando un processo che ha finito per distruggere la civiltà ellenica e, con le armi romane, infine "uccidere la Grecia".

# Ancora André e Simone Weil: lettere dal e al carcere nel 1940

L'irruzione dell'infinito sconvolse l'armonia numerica del mondo dei Pitagorici.

- André: "Ciò che rende oltremodo originale la matematica greca è forse il fatto che non esiste l'approssimazione: questo ha ucciso il numero a vantaggio del *logos* (è tutto qui il dramma della scoperta degli irrazionali)".
- "Certo, c'è stato un dramma di portata immensa – ribatte Simone. La divulgazione della scoperta ha gettato sulla nozione di verità un discredito che dura tuttora" innescando un processo che ha finito per distruggere la civiltà ellenica e, con le armi romane, infine "uccidere la Grecia".
- Perciò, conclude Simone, "gli dei hanno avuto ragione a far perire in un naufragio" Ippaso di Metaponto il quale, racconta Giamblico, contravvenendo alle prescrizioni di Pitagora divulgò la notizia della scoperta che non doveva uscire dalla cerchia della confraternita, e leggenda vuole che per ciò morisse in un naufragio.

# L'*anthyphairesis* di Euclide

- Per caratterizzare le grandezze incommensurabili tra loro Euclide ricorre alla procedura dell'*anthyphairesis*, l'algoritmo di reiterata sottrazione applicato a grandezze omogenee (per es. segmenti) che risale a Teeteto.

# L'*anthyphairesis* di Euclide

- Per caratterizzare le grandezze incommensurabili tra loro Euclide ricorre alla procedura dell'*anthyphairesis*, l'algoritmo di reiterata sottrazione applicato a grandezze omogenee (per es. segmenti) che risale a Teeteto.
- Nel Libro X degli *Elementi* Euclide afferma e dimostra che "se, quando la minore di due grandezze diseguali è continuamente sottratta a sua volta dalla maggiore, quello che resta non misura mai quello che lo precede, le grandezze saranno incommensurabili".

# L'infinito per i filosofi della natura dell'antichità

- Per i filosofi della natura presocratici l'infinito prende le forme dell'$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ di Anassimandro, indefinito e illimitato, principio ed elemento creativo primordiale, o anche polvere sottile che diventa "creta nelle mani del grande Vasaio dellUniverso".

# L'infinito per i filosofi della natura dell'antichità

- Per i filosofi della natura presocratici l'infinito prende le forme dell'$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ di Anassimandro, indefinito e illimitato, principio ed elemento creativo primordiale, o anche polvere sottile che diventa "creta nelle mani del grande Vasaio dellUniverso".
- Aristotele lo accosta al divino ma al tempo stesso, memore delle aporie di Zenone, avverte che l'infinito "suscita difficoltà nel pensiero di tutti".

# L'infinito per i filosofi della natura dell'antichità

- Per i filosofi della natura presocratici l'infinito prende le forme dell'$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ di Anassimandro, indefinito e illimitato, principio ed elemento creativo primordiale, o anche polvere sottile che diventa "creta nelle mani del grande Vasaio dellUniverso".
- Aristotele lo accosta al divino ma al tempo stesso, memore delle aporie di Zenone, avverte che l'infinito "suscita difficoltà nel pensiero di tutti".
- Da dove nasce la credenza che esista qualcosa di infinito? In primo luogo dal tempo, che "infatti, è infinito", dichiara Aristotele, e poi dalla divisione nelle grandezze di cui usano servirsi i matematici.

# L'infinito per i filosofi della natura dell'antichità

- Per i filosofi della natura presocratici l'infinito prende le forme dell'$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ di Anassimandro, indefinito e illimitato, principio ed elemento creativo primordiale, o anche polvere sottile che diventa "creta nelle mani del grande Vasaio dellUniverso".
- Aristotele lo accosta al divino ma al tempo stesso, memore delle aporie di Zenone, avverte che l'infinito "suscita difficoltà nel pensiero di tutti".
- Da dove nasce la credenza che esista qualcosa di infinito? In primo luogo dal tempo, che "infatti, è infinito", dichiara Aristotele, e poi dalla divisione nelle grandezze di cui usano servirsi i matematici.
- Tuttavia, l'infinito non può essere conosciuto in quanto tale, "non si deve credere a un infinito che possa esistere in atto". Non resta che concludere per la sua esistenza in potenza, come insegna anche Euclide.

# L'infinito per i filosofi della natura dell'antichità

- Per i filosofi della natura presocratici l'infinito prende le forme dell'$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ di Anassimandro, indefinito e illimitato, principio ed elemento creativo primordiale, o anche polvere sottile che diventa "creta nelle mani del grande Vasaio dellUniverso".
- Aristotele lo accosta al divino ma al tempo stesso, memore delle aporie di Zenone, avverte che l'infinito "suscita difficoltà nel pensiero di tutti".
- Da dove nasce la credenza che esista qualcosa di infinito? In primo luogo dal tempo, che "infatti, è infinito", dichiara Aristotele, e poi dalla divisione nelle grandezze di cui usano servirsi i matematici.
- Tuttavia, l'infinito non può essere conosciuto in quanto tale, "non si deve credere a un infinito che possa esistere in atto". Non resta che concludere per la sua esistenza in potenza, come insegna anche Euclide.
- La distinzione aristotelica tra infinito in potenza e in atto sarà fatta propria e ripetuta per secoli da matematici e filosofi.

# La natura del continuo secondo Aristotele

- "Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo" si legge in un frammento di Anassagora. "Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere". Ne segue che il continuo non può essere composto di punti "separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta".

# La natura del continuo secondo Aristotele

- "Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo" si legge in un frammento di Anassagora. "Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere". Ne segue che il continuo non può essere composto di punti "separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta".
- "L'infinito si manifesta in primo luogo nel continuo" afferma Aristotele del terzo libro della *Fisica*. La ragione risiede nel fatto che nel definire il continuo occorre servirsi del concetto di infinito, "perché è continuo ciò che è divisibile all'infinito".

# La natura del continuo secondo Aristotele

- "Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo" si legge in un frammento di Anassagora. "Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere". Ne segue che il continuo non può essere composto di punti "separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta".
- "L'infinito si manifesta in primo luogo nel continuo" afferma Aristotele del terzo libro della *Fisica*. La ragione risiede nel fatto che nel definire il continuo occorre servirsi del concetto di infinito, "perché è continuo ciò che è divisibile all'infinito".
- La concezione aristotelica di 'punto' come indivisibile dotato di posizione implica che una collezione comunque grande di punti non possa dar luogo a qualcosa di divisibile come una linea. "La retta è continua e il punto è indivisibile" e dunque "è impossibile che qualcosa di continuo sia composto di indivisibili" dichiara Aristotele.

# La natura del continuo secondo Aristotele

- "Nel piccolo non si dà un minimo, ma sempre un più piccolo" si legge in un frammento di Anassagora. "Perché ciò che è, per quanto venga suddiviso, non può cessare di essere". Ne segue che il continuo non può essere composto di punti "separati l'uno dall'altro come se fossero tagliati con un'accetta".
- "L'infinito si manifesta in primo luogo nel continuo" afferma Aristotele del terzo libro della *Fisica*. La ragione risiede nel fatto che nel definire il continuo occorre servirsi del concetto di infinito, "perché è continuo ciò che è divisibile all'infinito".
- La concezione aristotelica di 'punto' come indivisibile dotato di posizione implica che una collezione comunque grande di punti non possa dar luogo a qualcosa di divisibile come una linea. "La retta è continua e il punto è indivisibile" e dunque "è impossibile che qualcosa di continuo sia composto di indivisibili" dichiara Aristotele.
- Questa tesi trova largo seguito nei chierici medioevali, insieme alla confutazione dell'atomismo democriteo.

# Doctores medioevali

- Nell'*Opus majus* del 1267 Ruggero Bacone afferma che un qualunque corpo è divisibile all'infinito, e "tuttavia non per questo il mondo sarà composto di infinite parti materiali, chiamate atomi, come hanno sostenuto Democrito e Leucippo". Se così fosse la diagonale e lato di un quadrato non solo sarebbero commensurabili ma risulterebbero addirittura uguali, come Bacone illustra con un disegno che tra diagonale e lato stabilisce una corrispondenza punto a punto.

# Doctores medioevali

- Nell'*Opus majus* del 1267 Ruggero Bacone afferma che un qualunque corpo è divisibile all'infinito, e "tuttavia non per questo il mondo sarà composto di infinite parti materiali, chiamate atomi, come hanno sostenuto Democrito e Leucippo". Se così fosse la diagonale e lato di un quadrato non solo sarebbero commensurabili ma risulterebbero addirittura uguali, come Bacone illustra con un disegno che tra diagonale e lato stabilisce una corrispondenza punto a punto.
- Se così argomenta il *Doctor mirabilis* Bacone, non può certo esser da meno il *Doctor subtilis* Duns Scoto, che fornisce la stessa dimostrazione ricorrendo a due circonferenze concentriche: poste in corrispondenza biunivoca da raggi uscenti dal centro comune, esse risulterebbero addirittura uguali.

# Doctores medioevali

- Nell'*Opus majus* del 1267 Ruggero Bacone afferma che un qualunque corpo è divisibile all'infinito, e "tuttavia non per questo il mondo sarà composto di infinite parti materiali, chiamate atomi, come hanno sostenuto Democrito e Leucippo". Se così fosse la diagonale e lato di un quadrato non solo sarebbero commensurabili ma risulterebbero addirittura uguali, come Bacone illustra con un disegno che tra diagonale e lato stabilisce una corrispondenza punto a punto.
- Se così argomenta il *Doctor mirabilis* Bacone, non può certo esser da meno il *Doctor subtilis* Duns Scoto, che fornisce la stessa dimostrazione ricorrendo a due circonferenze concentriche: poste in corrispondenza biunivoca da raggi uscenti dal centro comune, esse risulterebbero addirittura uguali.
- Nel *Labyrinthus sive de compositione continui* (1631), scritto per combattere l'atomismo, il teologo di Lovanio Libertus Fromondus (ovvero Libert Froidmond) sostiene che se spazio e tempo fossero composti di indivisibili estesi, neppure un cavallo alato riuscirebbe a raggiungere una tartaruga che parte con un certo vantaggio.

# Contro il movimento

- Zenone: Un punto mobile su una retta non può andare da un punto $A$ a un punto $B$ perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio $C$ di $AB$, e poi il punto medio $D$ di $CB$ e così all'infinito.

# Contro il movimento

- Zenone: Un punto mobile su una retta non può andare da un punto $A$ a un punto $B$ perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio $C$ di $AB$, e poi il punto medio $D$ di $CB$ e così all'infinito.
- Lunghezza, tempo e in generale ogni continuo, spiega Aristotele, "vengono detti infiniti in due accezioni, infiniti per la divisione, o per gli estremi". Degli infiniti nella seconda accezione, ossia secondo la quantità "non è certo possibile toccare i vari punti in un tempo finito", cosa possibile invece per gli infiniti secondo la divisione perch anche il tempo è infinito allo stesso modo.

# Contro il movimento

- Zenone: Un punto mobile su una retta non può andare da un punto $A$ a un punto $B$ perché dovrebbe raggiungere prima il punto medio $C$ di $AB$, e poi il punto medio $D$ di $CB$ e così all'infinito.
- Lunghezza, tempo e in generale ogni continuo, spiega Aristotele, "vengono detti infiniti in due accezioni, infiniti per la divisione, o per gli estremi". Degli infiniti nella seconda accezione, ossia secondo la quantità "non è certo possibile toccare i vari punti in un tempo finito", cosa possibile invece per gli infiniti secondo la divisione perch anche il tempo è infinito allo stesso modo.
- L'argomento della dicotomia ha dunque a che fare con uno spazio finito infinitamente divisibile, così come lo è il tempo. Ne segue una corrispondenza tra spazio e tempo infiniti rispetto alla divisione, non essendo affatto assurdo – afferma Aristotele – che "in un tempo infinito si percorrano elementi o punti infiniti", giacché "l'infinito inerisce allo stesso modo alla lunghezza oltre che al tempo".

# Contro il movimento: Achille

- Secondo Aristotle, il ragionamento nel caso di Achille e la tartaruga è lo stesso della dicotomia.

# Contro il movimento: Achille

- Secondo Aristotle, il ragionamento nel caso di Achille e la tartaruga è lo stesso della dicotomia.
- Supponiamo che la tartaruga abbia un vantaggio di lunghezza 1 su Achille che corre il doppio più veloce della tartaruga. Allora l'argomento di Zenone si traduce nella serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

  che converge a 2, "un indizio secondo cui al giorno d'oggi si può pensare di risolvere il paradosso" (Weyl)

# Contro il movimento: Achille

- Secondo Aristotle, il ragionamento nel caso di Achille e la tartaruga è lo stesso della dicotomia.
- Supponiamo che la tartaruga abbia un vantaggio di lunghezza 1 su Achille che corre il doppio più veloce della tartaruga. Allora l'argomento di Zenone si traduce nella serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

  che converge a 2, "un indizio secondo cui al giorno d'oggi si può pensare di risolvere il paradosso" (Weyl)
- Ma Achille che percorre tutte le infinite distanze parziali di lunghezza $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$ come se fossero parti "disgiunte" è contrario all'essenza dell'infinito (Weyl)

# Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che “se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine”. L’inizio di una metà e la fine dell’altra.

# Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che "se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine". L'inizio di una metà e la fine dell'altra.
- Per Dedekind nel 1872 l''essenza' della continuità consiste nella proposizione (assioma) che esiste uno e un sol punto che produce una suddivisione della retta in due parti.

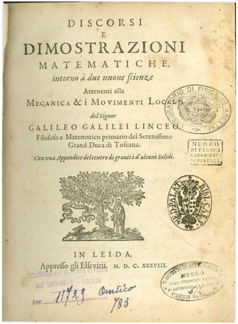
# Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che "se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine". L'inizio di una metà e la fine dell'altra.
- Per Dedekind nel 1872 l''essenza' della continuità consiste nella proposizione (assioma) che esiste uno e un sol punto che produce una suddivisione della retta in due parti.
- Hermann Weyl nel 1927 spiega che il continuo, o la variabile, è rappresentata da "una successione di scelte 'in divenire' (*werdende Wahlfolge*), creata *passo passo da scelte non condizionate e indipendenti l'una dall'altra*, e che rimane perci necessariamente *in statu nascenti*" mentre "una successione determinata *ad infinitum* da una legge rappresenta un singolo numero reale appartenente al continuo".

# Ancora sulla natura del continuo

- Dice Aristotele che "se si divide il continuo in due metà, ci si serve di un solo punto come se fossero due: infatti segna un inizio e una fine". L'inizio di una metà e la fine dell'altra.
- Per Dedekind nel 1872 l''essenza' della continuità consiste nella proposizione (assioma) che esiste uno e un sol punto che produce una suddivisione della retta in due parti.
- Hermann Weyl nel 1927 spiega che il continuo, o la variabile, è rappresentata da "una successione di scelte 'in divenire' (*werdende Wahlfolge*), creata *passo passo da scelte non condizionate e indipendenti l'una dall'altra*, e che rimane perci necessariamente *in statu nascenti*" mentre "una successione determinata *ad infinitum* da una legge rappresenta un singolo numero reale appartenente al continuo".
- Secondo Brouwer il continuo non è composto di parti, sottolinea Weyl, aggiungendo che nella concezione intuizionista "trova una formulazione matematica precisa una vecchia verità espressa da Aristotele".

# La ruota di Aristotele



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

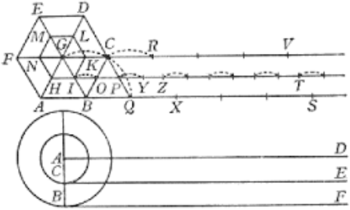
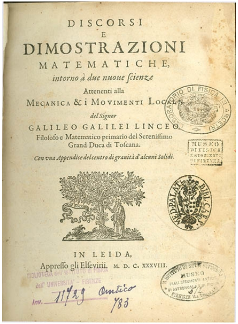



Figure: *Discorsi e dimostrazioni...*, 1638

- "Salv. : Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?"

# La ruota di Aristotele



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
*intorno à due nuoue scienze*
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI
*del Signor*
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
*Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.*

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

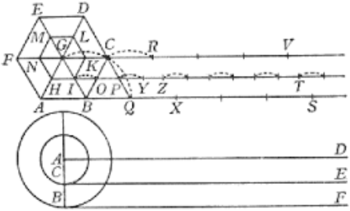
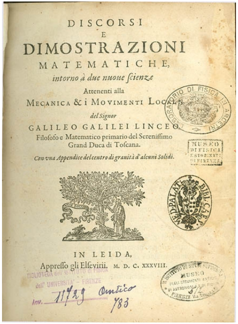



Figure: *Discorsi e dimostrazioni...*, 1638

- "Salv. : Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?"
- "Sagr.: Il negozio è veramente molto intrigato..."



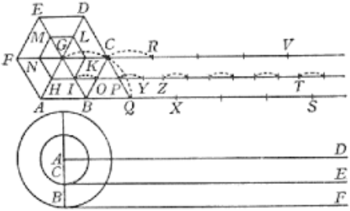




Figure: *Discorsi e dimostrazioni...*, 1638

- "Salv. : Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?"
- "Sagr.: Il negozio è veramente molto intrigato..."
- "Sagr.: Ne' cerchi (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata da gl'infiniti lati del cerchio grande [è] pareggiata in lunghezza dalla linea passata da gl'infiniti lati del minore . . . con l'interposizione d'altrettanti vacui (non quanti)".

# La composizione del continuo

- Nelle *Esercitazioni filosofiche* (1633), dedicate a Urbano VIII, il peripatetico padovano Antonio Rocco giudica "difficile, inintelligibile e per avventura falso" il detto *sphera tangit planum in puncto*, che una sfera tangente a un piano in un punto, giacché ne seguirebbe (contro Aristotele) che la linea è composta di punti.

# La composizione del continuo

- Nelle *Esercitazioni filosofiche* (1633), dedicate a Urbano VIII, il peripatetico padovano Antonio Rocco giudica "difficile, inintelligibile e per avventura falso" il detto *sphera tangit planum in puncto*, che una sfera tangente a un piano in un punto, giacché ne seguirebbe (contro Aristotele) che la linea è composta di punti.
- Essendo vero che il continuo consta di parti sempre divisibili, afferma Galileo, "dico che è verissimo e necessario che la linea sia composta di punti e il continuo di indivisibili".

# La composizione del continuo

- Nelle *Esercitazioni filosofiche* (1633), dedicate a Urbano VIII, il peripatetico padovano Antonio Rocco giudica "difficile, inintelligibile e per avventura falso" il detto *sphera tangit planum in puncto*, che una sfera tangente a un piano in un punto, giacché ne seguirebbe (contro Aristotele) che la linea è composta di punti.
- Essendo vero che il continuo consta di parti sempre divisibili, afferma Galileo, "dico che è verissimo e necessario che la linea sia composta di punti e il continuo di indivisibili".
- "Il continuo è divisibile in parti sempre divisibili sol perché consta di indivisibili" dal momento che, se la suddivisione si deve poter continuare sempre, bisogna necessariamente che le parti siano infinite (altrimenti la suddivisione ad un certo punto si arresterebbe). E se sono infinite, necessariamente "bisogna che non sieno quante", spiega Galileo, "perché infiniti quanti compongono un quanto infinito".

# Una nuova “fantasticheria”

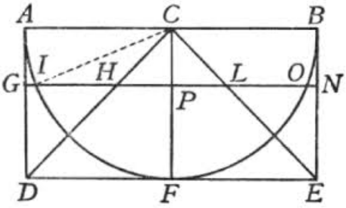
Il fascino dell’infinito è tale che “l’humano discorso non vuol rimanersi dall’aggirarsegli intorno”.

- Dopo la ruota di Aristotele, Salviati presenta una nuova “fantasticheria”. Prendendo a prestito un solido studiato da Luca Valerio, Salviati chiede “come si possa mai capire, che un sol punto sia uguale a una linea?”

# Una nuova "fantasticheria"

Il fascino dell'infinito è tale che "l'humano discorso non vuol rimanersi dall'aggirarsegli intorno".

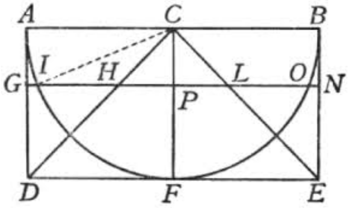
- Dopo la ruota di Aristotele, Salviati presenta una nuova "fantasticheria". Prendendo a prestito un solido studiato da Luca Valerio, Salviati chiede "come si possa mai capire, che un sol punto sia uguale a una linea?"
- Considera la figura



# Una nuova “fantasticheria”

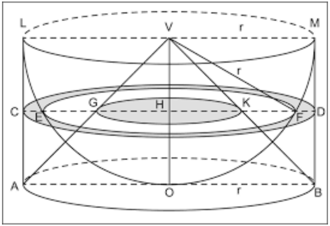
Il fascino dell’infinito è tale che “l’humano discorso non vuol rimanersi dall’aggirarsegli intorno”.

- Dopo la ruota di Aristotele, Salviati presenta una nuova “fantasticheria”. Prendendo a prestito un solido studiato da Luca Valerio, Salviati chiede “come si possa mai capire, che un sol punto sia uguale a una linea?”
- Considera la figura



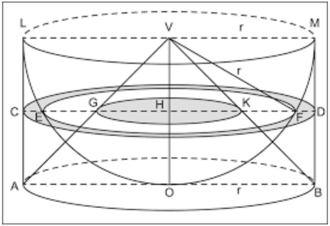

- Ruotando la figura intorno all’asse CF si ottiene un cilindro, un cono e una semisfera. Se si immagina di togliere la semisfera “quel che rimarrà del cilindro” è una figura simile a una “scodella”.

# La "scodella' di Galileo




- Le sezioni della scodella e del cono, ottenute tagliando il solido con un piano parallelo alla base, hanno aree uguali. Dunque, "alzando e alzando" il piano secante, alla fine le sezioni si ridurranno risp. a una circonferenza ("l'orlo supremo della scodella") e a un punto (il vertice $V$ del cono).

# La “scodella’ di Galileo




- Le sezioni della scodella e del cono, ottenute tagliando il solido con un piano parallelo alla base, hanno aree uguali. Dunque, “alzando e alzando” il piano secante, alla fine le sezioni si ridurranno risp. a una circonferenza (“l’orlo supremo della scodella”) e a un punto (il vertice $V$ del cono).
- “Or mentre che nella diminuzione de i due solidi si va, sino all’ultimo, mantenendo sempre tra essi la egualità ben par conveniente il dire che gli altissimi ed ultimi termini di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l’uno infinitamente maggior dell’altro”.

# “Un pedantesco affronto”

- Per Cavalieri, invece, quando si arriva agli “altissimi ed ultimi termini” non si hanno più piani e queste ultime “esinanitioni” come egli le chiama si possono dire uguali solo nel senso che siamo “noi arrivati al nullo piano tanto nel cono quanto nella scodella, non havendoci che far niente che in uno resti un punto e nell’altro una linea”, dal momento che “sia niun piano la linea come il ponto”.

# “Un pedantesco affronto”

- Per Cavalieri, invece, quando si arriva agli “altissimi ed ultimi termini” non si hanno più piani e queste ultime “esinanitioni” come egli le chiama si possono dire uguali solo nel senso che siamo “noi arrivati al nullo piano tanto nel cono quanto nella scodella, non havendoci che far niente che in uno resti un punto e nell’altro una linea”, dal momento che “sia niun piano la linea come il ponto”.
- Un argomento che Galileo liquida come “un pedantesco affronto” verso la sua “specolazione tanto gentile e peregrina”.

# Oscuri, e dubbj sentieri, o più tosto laberinti

- Salviati: Si tratta di difficoltà che "derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti".

# Oscuri, e dubbj sentieri, o più tosto laberinti

- Salviati: Si tratta di difficoltà che "derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti".
- "l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili". Per immaginare che una linea continua sia composta di indivisibili "conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile".

# Oscuri, e dubbj sentieri, o più tosto laberinti

- Salviati: Si tratta di difficoltà che "derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti".
- "l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili". Per immaginare che una linea continua sia composta di indivisibili "conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile".
- Quando ci si avventura lungo gli "oscuri sentieri" o meglio i "laberinti" degli infiniti e infinitesimi, si presenta spontaneo un dubbio che Simplicio reputa insolubile: date due linee, per es. due segmenti, disuguali, si dirà che "l'infinità dei punti della linea maggiore eccederà l'infinità dei punti della minore"? ovvero che si può dare "un infinito maggior dell'infinito"?

# Paradossi

- Salviati : "quando il Sig. Simplicio mi propone e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti".

# Paradossi

- Salviati : “quando il Sig. Simplicio mi propone e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti”.
- Infiniti sì, come dice Galileo, ma anche “altrettanti” nel senso che chiarirà Cantor oltre due secoli dopo.

# Paradossi

- Salviati : "quando il Sig. Simplicio mi propone e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti".
- Infiniti sì, come dice Galileo, ma anche "altrettanti" nel senso che chiarirà Cantor oltre due secoli dopo.
- L'argomento celebre dei numeri e dei quadrati

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \end{array}$$

# Paradossi

- Salviati : “quando il Sig. Simplicio mi propone e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti”.
- Infiniti sì, come dice Galileo, ma anche “altrettanti” nel senso che chiarirà Cantor oltre due secoli dopo.
- L’argomento celebre dei numeri e dei quadrati

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \end{array}$$

- La conclusione di Galileo è che “gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl’infiniti, ma solo nelle quantità terminate”.

# Labirinti inesplicabili

- Kepler rigetta con decisione l'idea che l'universo sia infinito, e tratta con sarcasmo la "setta di filosofi" che non basano i propri ragionamenti sui sensi e "non accordano le cause delle cose con gli esperimenti" ma concepiscono "tra le pareti del proprio cervello una qualche opinione sulla costituzione del mondo" e poi "vi si attaccano coi denti" e adattano "ai propri assiomi" le cose che accadono "tirandole per i capelli".

# Labirinti inesplicabili

- Kepler rigetta con decisione l'idea che l'universo sia infinito, e tratta con sarcasmo la "setta di filosofi" che non basano i propri ragionamenti sui sensi e "non accordano le cause delle cose con gli esperimenti" ma concepiscono "tra le pareti del proprio cervello una qualche opinione sulla costituzione del mondo" e poi "vi si attaccano coi denti" e adattano "ai propri assiomi" le cose che accadono "tirandole per i capelli".
- Contro di essi si scaglia nel 1606 nel *De stella nova in pede Serpentarii* commentando l'apparizione di una "nuova stella". Con la loro infinità, che "proviene dalle antiche scuole dei filosofi pagani", i filosofi di quella setta che "abusa dell'autorità copernicana" si perdono per Kepler in "labirinti inesplicabili". Come  avvenuto allo "sventurato Giordano Bruno", che "rende il mondo infinito in modo tale, che quante sono le stelle fisse, tanti sono i mondi". Basta solo il pensiero "di errare in questa immensità priva di limiti, centro e luoghi certi" a provocare in Kepler "non so qual occulto orrore".

- “Come è possibile che l’universo sia infinito?” chiede Elpino a Filoteo nel dialogo *De l’infinito universo et mondi* di Bruno

# Infiniti mondi

GIORDA-
NO BRVNO
Nolano.

De l' infinito vniuerſo
et Mondi.

All' illuſtriſſimo Signor di
Mauuiſsiero.

Stampato in Venetia.
Anno. M. D. LXXXIIII.

[N. 69].

- "Come è possibile che l'universo sia infinito?" chiede Elpino a Filoteo nel dialogo *De l'infinito universo et mondi* di Bruno
- "Come è possibile che l'universo sia finito?" ribatte Filoteo. Non è certo attraverso i sensi che abbiamo nozione dell'infinito.

# Infiniti mondi


GIORDA-
NO BRVNO
Nolano.

De l' infinito vniuerſo
et Mondi.

All' illuſtriſsimo Signor di
Mauuiſsiero.

Stampato in Venetia.
Anno. M. D. LXXXIIII.

[N. 69]

- "Come è possibile che l'universo sia infinito?" chiede Elpino a Filoteo nel dialogo *De l'infinito universo et mondi* di Bruno
- "Come è possibile che l'universo sia finito?" ribatte Filoteo. Non è certo attraverso i sensi che abbiamo nozione dell'infinito.
- Bruno fa dire in conclusione a Filoteo che "uno è il loco generale, uno il spacio immenso che chiamar possiamo liberamente vacuo; in cui sono innumerabili e infiniti globi, come vi è questo in cui vivemo e vegetamo noi. Cotal spacio lo diciamo infinito, perché non è raggione, convenienza, possibilità, senso o natura che debba finirlo".

# Infiniti mondi


- "Come è possibile che l'universo sia infinito?" chiede Elpino a Filoteo nel dialogo *De l'infinito universo et mondi* di Bruno
- "Come è possibile che l'universo sia finito?" ribatte Filoteo. Non è certo attraverso i sensi che abbiamo nozione dell'infinito.
- Bruno fa dire in conclusione a Filoteo che "uno è il loco generale, uno il spacio immenso che chiamar possiamo liberamente vacuo; in cui sono innumerabili e infiniti globi, come vi è questo in cui vivemo e vegetamo noi. Cotal spacio lo diciamo infinito, perché non è raggione, convenienza, possibilità, senso o natura che debba finirlo".
- Nella sua opera "si magnifica l'eccellenza di Dio", si manifesta "la grandezza de l'imperio suo" che "non si glorifica in uno, ma in soli innumerevoli: non in una terra, un mondo, ma in duecento mila, dico infatti in infiniti".

# Interminati spazi

- Per il Calvino Bruno è un “grande cosmologo visionario, che vede l’universo infinito e composto di mondi innumerevoli, ma non può dirlo 'totalmente infinito’, che è prerogativa solo di Dio “perché tutto lui è in tutto il mondo, ed in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente”.

- Per il Calvino Bruno è un "grande cosmologo visionario, che vede l'universo infinito e composto di mondi innumerevoli, ma non può dirlo 'totalmente infinito', che è prerogativa solo di Dio "perché tutto lui è in tutto il mondo, ed in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente".
- Secondo Borges, "la rottura delle volte stellari fu una liberazione" per Bruno, che "cercò le parole per manifestare agli uomini lo spazio copernicano" e proclamò con esultanza che "possiamo affermare con certezza che l'universo è tutto esso centro, o che il centro dell'universo sta dappertutto e la sua circonferenza in nessun luogo", attribuendo allo spazio ciò che nel *Liber XXIV philosophorum* – una compilazione anonima del XII secolo – è invece prerogativa, se non una delle definizioni, di Dio (*sphera infinita cuius centrum ubique, circumpherentia nullibi*).

# Interminati spazi

- Per il Calvino Bruno è un "grande cosmologo visionario, che vede l'universo infinito e composto di mondi innumerevoli, ma non può dirlo 'totalmente infinito', che è prerogativa solo di Dio "perché tutto lui è in tutto il mondo, ed in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente".
- Secondo Borges, "la rottura delle volte stellari fu una liberazione" per Bruno, che "cercò le parole per manifestare agli uomini lo spazio copernicano" e proclamò con esultanza che "possiamo affermare con certezza che l'universo è tutto esso centro, o che il centro dell'universo sta dappertutto e la sua circonferenza in nessun luogo", attribuendo allo spazio ciò che nel *Liber XXIV philosophorum* – una compilazione anonima del XII secolo – è invece prerogativa, se non una delle definizioni, di Dio (*sphera infinita cuius centrum ubique, circumpherentia nullibi*).
- Per Kepler il cosmo ha forma sferica finita perché il mondo è l'immagine corporea di Dio (*mundus est imago Dei corporea*).

# Interminati spazi

- Per il Calvino Bruno è un "grande cosmologo visionario, che vede l'universo infinito e composto di mondi innumerevoli, ma non può dirlo 'totalmente infinito', che è prerogativa solo di Dio "perché tutto lui è in tutto il mondo, ed in ciascuna sua parte infinitamente e totalmente".
- Secondo Borges, "la rottura delle volte stellari fu una liberazione" per Bruno, che "cercò le parole per manifestare agli uomini lo spazio copernicano" e proclamò con esultanza che "possiamo affermare con certezza che l'universo è tutto esso centro, o che il centro dell'universo sta dappertutto e la sua circonferenza in nessun luogo", attribuendo allo spazio ciò che nel *Liber XXIV philosophorum* – una compilazione anonima del XII secolo – è invece prerogativa, se non una delle definizioni, di Dio (*sphera infinita cuius centrum ubique, circumpherentia nullibi*).
- Per Kepler il cosmo ha forma sferica finita perché il mondo è l'immagine corporea di Dio (*mundus est imago Dei corporea*).
- Invece Galileo fa dire a Simplicio da Salviati: "né voi né alcun altro ha mai provato che il mondo è finito e dotato di figura o infinito e interminato". Interminato come gli spazi di Leopardi.

# Infinito silenzio

- Anche Pascal afferma nei *Pensieri* che lo spazio (non Dio) è "una sfera infinita il cui centro sta dappertutto e la cui circonferenza in nessun luogo". Espressioni come questa non vanno prese in modo rigoroso, avverte Leibniz nel 1692. Sono "un po' come gl'immaginari in algebra", non rigorosi ma utili per la scoperta (*pour l'invention*).

# Infinito silenzio

- Anche Pascal afferma nei *Pensieri* che lo spazio (non Dio) è "una sfera infinita il cui centro sta dappertutto e la cui circonferenza in nessun luogo". Espressioni come questa non vanno prese in modo rigoroso, avverte Leibniz nel 1692. Sono "un po' come gl'immaginari in algebra", non rigorosi ma utili per la scoperta (*pour l'invention*).
- "Il silenzio eterno di quegli spazi infiniti mi atterrisce" dice Pascal per esprimerne il disorientamento di fronte all'idea che l'universo non sia chiuso dal cielo delle stelle fisse "come da una camicia o da una tunica", per dirla con Kepler. Caustico il commento di Borges: "Pascal menziona con disdegno 'l'opinione di Copernico' ma la sua opera riflette per noi la vertigine di un teologo, esiliato dall'orbe dell'Almagesto e smarrito nell'universo copernicano di Kepler e Bruno".

# Infinito silenzio

- Anche Pascal afferma nei *Pensieri* che lo spazio (non Dio) è "una sfera infinita il cui centro sta dappertutto e la cui circonferenza in nessun luogo". Espressioni come questa non vanno prese in modo rigoroso, avverte Leibniz nel 1692. Sono "un po' come gl'immaginari in algebra", non rigorosi ma utili per la scoperta (*pour l'invention*).
- "Il silenzio eterno di quegli spazi infiniti mi atterrisce" dice Pascal per esprimerne il disorientamento di fronte all'idea che l'universo non sia chiuso dal cielo delle stelle fisse "come da una camicia o da una tunica", per dirla con Kepler. Caustico il commento di Borges: "Pascal menziona con disdegno 'l'opinione di Copernico' ma la sua opera riflette per noi la vertigine di un teologo, esiliato dall'orbe dell'Almagesto e smarrito nell'universo copernicano di Kepler e Bruno".
- E il suo smarrimento trova eco in "quello infinito silenzio" del poeta di Recanati.

# Infinito e nulla

- Nei *Pensieri* Pascal afferma che "non c'è geometra che non creda alla divisibilità all'infinito dello spazio" e tuttavia, al tempo stesso, "non c'è geometra che comprenda una divisione infinita". Di modo che, continua Pascal, la potenza della natura ci circonda da ogni parte con una doppia infinità, "una infinità e un nulla di estensione, una infinità e un nulla di numero, una infinità e un nulla di movimento, una infinità e un nulla di tempo". Ovvero, come dirà Nietzsche, "non andiamo forse errando in un nulla infinito?"

# Infinito e nulla

- Nei *Pensieri* Pascal afferma che "non c'è geometra che non creda alla divisibilità all'infinito dello spazio" e tuttavia, al tempo stesso, "non c'è geometra che comprenda una divisione infinita". Di modo che, continua Pascal, la potenza della natura ci circonda da ogni parte con una doppia infinità, "una infinità e un nulla di estensione, una infinità e un nulla di numero, una infinità e un nulla di movimento, una infinità e un nulla di tempo". Ovvero, come dirà Nietzsche, "non andiamo forse errando in un nulla infinito?"
- Ma per Leopardi "niente nella natura annuncia l'infinito, l'esistenza di alcuna cosa infinita. L'infinito è un parto della nostra immaginazione".

# Infinito e nulla

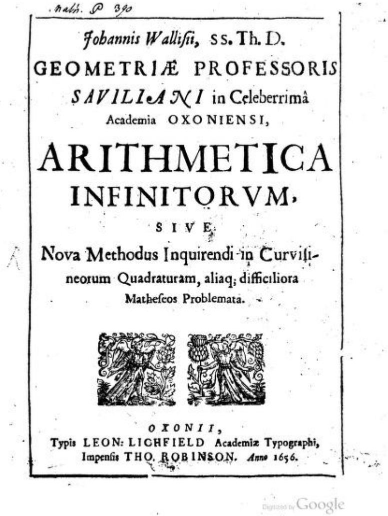
- Nei *Pensieri* Pascal afferma che “non c’è geometra che non creda alla divisibilità all’infinito dello spazio” e tuttavia, al tempo stesso, “non c’è geometra che comprenda una divisione infinita”. Di modo che, continua Pascal, la potenza della natura ci circonda da ogni parte con una doppia infinità, “una infinità e un nulla di estensione, una infinità e un nulla di numero, una infinità e un nulla di movimento, una infinità e un nulla di tempo”. Ovvero, come dirà Nietzsche, “non andiamo forse errando in un nulla infinito?”
- Ma per Leopardi “niente nella natura annuncia l’infinito, l’esistenza di alcuna cosa infinita. L’infinito è un parto della nostra immaginazione”.
- L’infinito, dice Leopardi “è un’idea, un sogno, non una realtà: almeno niuna prova abbiamo dell’esistenza di esso, neppur per analogia, e possiam dire di essere a un’infinita distanza dalla cognizione e dalla dimostrazione di una tale esistenza”, e anzi “si potrebbe anche disputare non poco se l’infinito sia possibile (cosa che alcuni moderni hanno ben negato) e se questa idea, figlia della nostra immaginazione, non sia contraddittoria in se stessa, cioè falsa in metafisica”.

# Contro gli indivisibili

- La condanna degli indivisibili da parte dei gesuiti viene definitivamente ribadita nel 1651 nell'*Ordinatio pro studiis superioribus*. Tra le 65 tesi filosofiche che vi sono condannate figurano proposizioni come "Il continuo delle successioni consta solo di indivisibili", o "L'infinito, in numero o grandezza, si può racchiudere tra due unità, o due punti".

# Contro gli indivisibili

- La condanna degli indivisibili da parte dei gesuiti viene definitivamente ribadita nel 1651 nell'*Ordinatio pro studiis superioribus*. Tra le 65 tesi filosofiche che vi sono condannate figurano proposizioni come "Il continuo delle successioni consta solo di indivisibili", o "L'infinito, in numero o grandezza, si può racchiudere tra due unità, o due punti".
- Anche Spinoza nell'*Ethica more geometrico demonstrata* (1677) scrive che "altri, dopo aver finto che una linea sia composta da punti, sono bravi a trovare molti argomenti con cui mostrare che essa non si può dividere all'infinito; e, in effetti, non è meno assurdo sostenere che la sostanza corporea si componga di parti, ossia di corpi, di quanto lo sia che un corpo si componga di superfici, le superfici di linee, e queste, infine, di punti".



Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
ARITHMETICA
INFINITORUM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora
Matheseos Problemata.

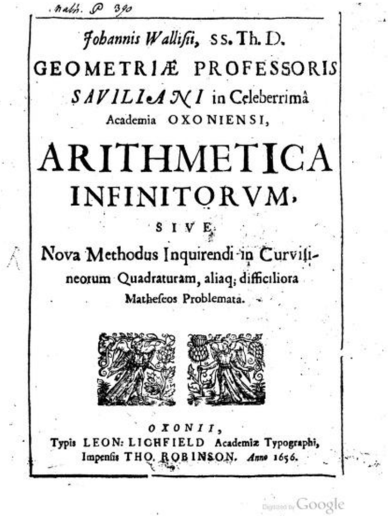
OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1656.



Come Cavalieri, anche Wallis suppone che

- un piano sia costituito da un numero infinito di rette parallele, e un solido da un'infinità di piani paralleli

# L'*Arithmetica infinitorum* (1655) di Wallis



Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA
INFINITORVM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora
Matheseos Problemata.

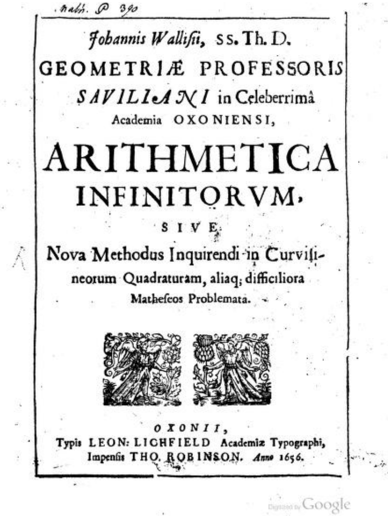
OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1656.



Come Cavalieri, anche Wallis suppone che

- un piano sia costituito da un numero infinito di rette parallele, e un solido da un'infinità di piani paralleli
- una figura piana sia composta da un'infinità di parallelogrammi ciascuno di altezza uguale a $1/\infty$ dell'altezza totale della figura

# L'*Arithmetica infinitorum* (1655) di Wallis


Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
ARITHMETICA
INFINITORVM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora
Matheseos Problemata.

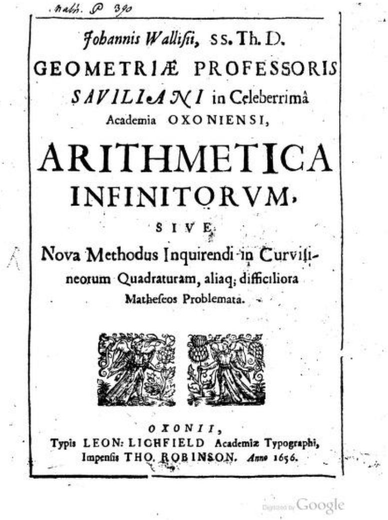
OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1656.



Come Cavalieri, anche Wallis suppone che

- un piano sia costituito da un numero infinito di rette parallele, e un solido da un'infinità di piani paralleli
- una figura piana sia composta da un'infinità di parallelogrammi ciascuno di altezza uguale a $1/\infty$ dell'altezza totale della figura
- $\infty \pm 1 = \infty$ e che $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$

# L'*Arithmetica infinitorum* (1655) di Wallis



nabl. P 390

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
ARITHMETICA
INFINITORVM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora
Matheseos Problemata.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1656.



Come Cavalieri, anche Wallis suppone che

- un piano sia costituito da un numero infinito di rette parallele, e un solido da un'infinità di piani paralleli
- una figura piana sia composta da un'infinità di parallelogrammi ciascuno di altezza uguale a $1/\infty$ dell'altezza totale della figura
- $\infty \pm 1 = \infty$ e che $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$
- Trova la quadratura delle infinite curve della forma (in termini moderni) $y = kx^n$ per $n$ intero

# L'*Arithmetica infinitorum* (1655) di Wallis

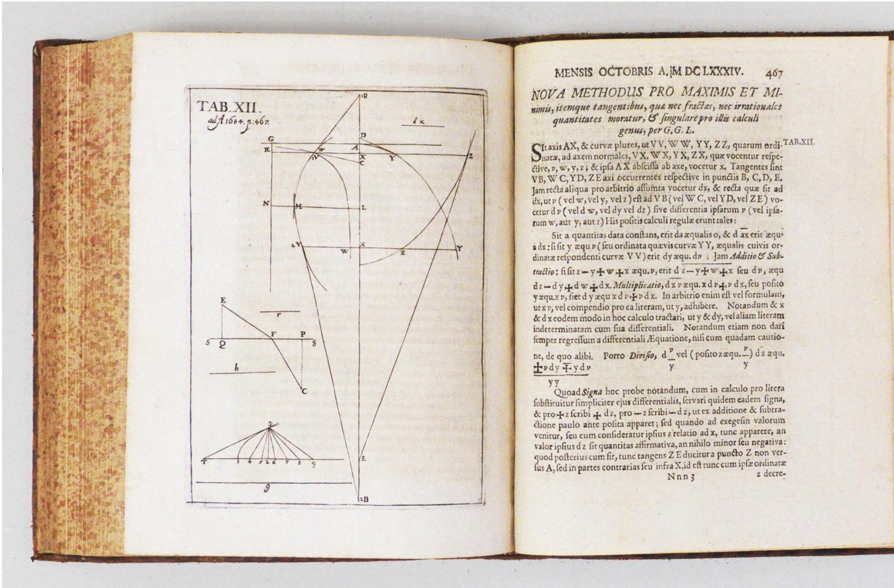

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
ARITHMETICA
INFINITORVM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora
Matheseos Problemata.
OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1656.



Come Cavalieri, anche Wallis suppone che

- un piano sia costituito da un numero infinito di rette parallele, e un solido da un'infinità di piani paralleli
- una figura piana sia composta da un'infinità di parallelogrammi ciascuno di altezza uguale a $1/\infty$ dell'altezza totale della figura
- $\infty \pm 1 = \infty$ e che $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$
- Trova la quadratura delle infinite curve della forma (in termini moderni) $y = kx^n$ per $n$ intero
- Per induzione $\frac{4}{\pi} = \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times\ldots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times\ldots}$

# La nuova analisi infinitesimale (Leibniz)




MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

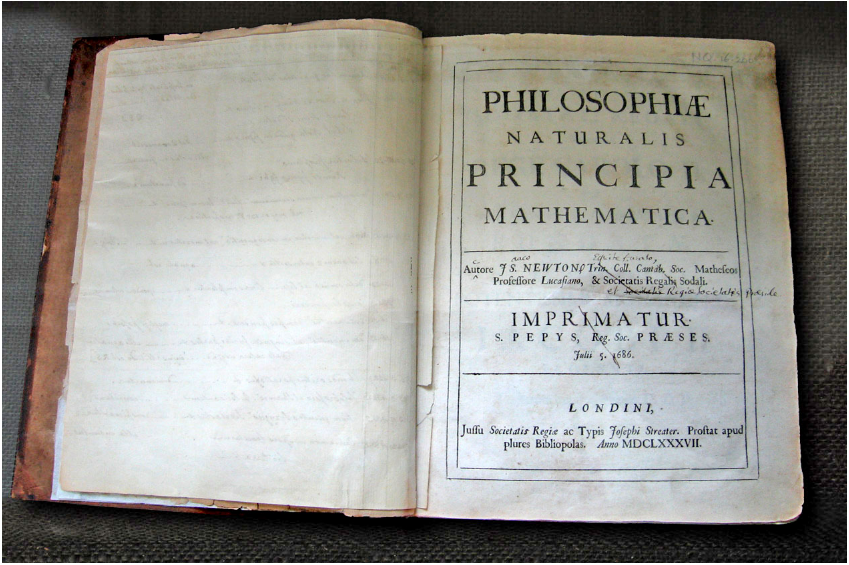
*NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.*

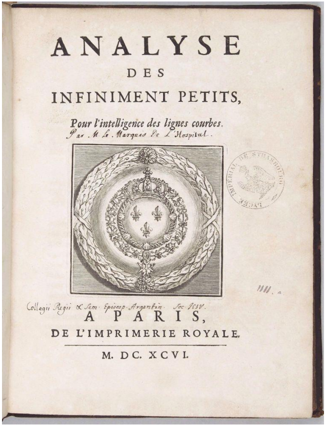
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, $v$, $w$, $y$, $z$; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur $x$. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur $dx$, & recta quæ sit ad $dx$, ut $v$ (vel $w$, vel $y$, vel $z$) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur $dv$ (vel $dw$, vel $dy$ vel $dz$) sive differentia ipsarum $v$ (vel ipsarum $w$, aut $y$, aut $z$) His positis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Sit $a$ quantitas data constans, erit $da$ æqualis 0, & $d\overline{ax}$ erit æqu. $a\,dx$: si sit $y$ æqu $v$ (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit $dy$ æqu. $dv$. Jam *Additio & Subtractio*: si sit $z-y+w+x$ æqu. $v$, erit $d\overline{z-y+w+x}$ seu $dv$, æqu $dz-dy+dw+dx$. *Multiplicatio*, $d\overline{xv}$ æqu. $x\,dv+v\,dx$, seu posito $y$ æqu. $xv$, fiet $dy$ æqu $x\,dv+v\,dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut $xv$, vel compendio pro ea literam, ut $y$, adhibere. Notandum & $x$ & $dx$ eodem modo in hoc calculo tractari, ut $y$ & $dy$, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, $d\frac{v}{y}$ vel (posito $z$ æqu. $\frac{v}{y}$) $dz$ æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro $+z$ scribi $+dz$, pro $-z$ scribi $-dz$, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius $z$ relatio ad $x$, tunc apparere, an valor ipsius $dz$ sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ $z$ decre-

Nnn 3

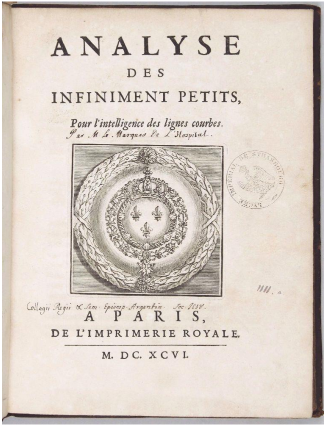

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheſeos
Profeſſore Lucaſiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Juſſu Societatis Regiæ ac Typis Joſephi Streater. Proſtat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.




L'Hopital richiede

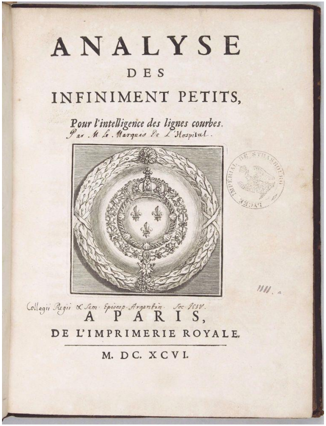
- 1) che "si possano prendere l'una per l'altra" due quantità che differiscono tra loro per una quantità infinitesima, e

# L'*Analyse des infiniment petits* (1696)




L'Hopital richiede

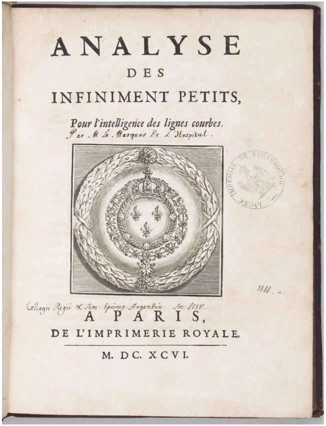
- 1) che "si possano prendere l'una per l'altra" due quantità che differiscono tra loro per una quantità infinitesima, e
- 2) che una linea curva possa essere considerata come costituita da un'infinità di linee rette infinitesime, ossia come un poligono con infiniti lati infinitamente piccoli.




L'Hopital richiede

- 1) che "si possano prendere l'una per l'altra" due quantità che differiscono tra loro per una quantità infinitesima, e
- 2) che una linea curva possa essere considerata come costituita da un'infinità di linee rette infinitesime, ossia come un poligono con infiniti lati infinitamente piccoli.
- Da queste due supposizioni egli fa discendere le regole per il differenziale di una somma, prodotto, quoziente o potenza (intera o frazionaria) di quantità variabili.

# L'*Analyse des infiniment petits* (1696)



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
*Pour l'intelligence des lignes courbes.*
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

L'Hopital richiede

- 1) che "si possano prendere l'una per l'altra" due quantità che differiscono tra loro per una quantità infinitesima, e
- 2) che una linea curva possa essere considerata come costituita da un'infinità di linee rette infinitesime, ossia come un poligono con infiniti lati infinitamente piccoli.
- Da queste due supposizioni egli fa discendere le regole per il differenziale di una somma, prodotto, quoziente o potenza (intera o frazionaria) di quantità variabili.
- Egli afferma poi che il prolungamento di un lato infinitesimo $Mm$ del poligono che costituisce la curva è la tangente a una curva nel punto $M$ o $m$

# Critici della nuova analisi infinitesimale

- Nieuwentijt nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas* (1694) sostiene che "due grandezze sono uguali solo se la loro differenza è nulla, ossia uguale a zero". Un enunciato di "limpida evidenza", che tuttavia contraddice quanto richiede l'Hopital nell'*Analyse*

# Critici della nuova analisi infinitesimale

- Nieuwentijt nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas* (1694) sostiene che "due grandezze sono uguali solo se la loro differenza è nulla, ossia uguale a zero". Un enunciato di "limpida evidenza", che tuttavia contraddice quanto richiede l'Hopital nell'*Analyse*
- Nieuwentijt ammette solo gli infinitesimi del prim'ordine, e critica il fatto che nel corso dei calcoli gli infinitesimi come $dxdy$ o $d^2x$ debbano sparire

# Critici della nuova analisi infinitesimale

- Nieuwentijt nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas* (1694) sostiene che "due grandezze sono uguali solo se la loro differenza è nulla, ossia uguale a zero". Un enunciato di "limpida evidenza", che tuttavia contraddice quanto richiede l'Hopital nell'*Analyse*
- Nieuwentijt ammette solo gli infinitesimi del prim'ordine, e critica il fatto che nel corso dei calcoli gli infinitesimi come $dxdy$ o $d^2x$ debbano sparire
- Michel Rolle (*Du nouveau sistème de l'infini*, 1703): "Sembra che la caratteristica dell'esattezza non regni più in geometria da quando vi ha fatto la sua comparsa il nuovo sistema di quantità infinitesime"

# Critici della nuova analisi infinitesimale

- Nieuwentijt nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas* (1694) sostiene che "due grandezze sono uguali solo se la loro differenza è nulla, ossia uguale a zero". Un enunciato di "limpida evidenza", che tuttavia contraddice quanto richiede l'Hopital nell'*Analyse*
- Nieuwentijt ammette solo gli infinitesimi del prim'ordine, e critica il fatto che nel corso dei calcoli gli infinitesimi come $dxdy$ o $d^2x$ debbano sparire
- Michel Rolle (*Du nouveau sistème de l'infini*, 1703): "Sembra che la caratteristica dell'esattezza non regni più in geometria da quando vi ha fatto la sua comparsa il nuovo sistema di quantità infinitesime"
- "un sistema che non ha prodotto alcuna nuova verità e spesso maschera errori"

# Critici della nuova analisi infinitesimale

- Nieuwentijt nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas* (1694) sostiene che "due grandezze sono uguali solo se la loro differenza è nulla, ossia uguale a zero". Un enunciato di "limpida evidenza", che tuttavia contraddice quanto richiede l'Hopital nell'*Analyse*
- Nieuwentijt ammette solo gli infinitesimi del prim'ordine, e critica il fatto che nel corso dei calcoli gli infinitesimi come $dxdy$ o $d^2x$ debbano sparire
- Michel Rolle (*Du nouveau sistème de l'infini*, 1703): "Sembra che la caratteristica dell'esattezza non regni più in geometria da quando vi ha fatto la sua comparsa il nuovo sistema di quantità infinitesime"
- "un sistema che non ha prodotto alcuna nuova verità e spesso maschera errori"
- considerare uguali quantità che differiscono per infinitesimi

# Critici della nuova analisi infinitesimale

- Nieuwentijt nelle *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas* (1694) sostiene che "due grandezze sono uguali solo se la loro differenza è nulla, ossia uguale a zero". Un enunciato di "limpida evidenza", che tuttavia contraddice quanto richiede l'Hopital nell'*Analyse*
- Nieuwentijt ammette solo gli infinitesimi del prim'ordine, e critica il fatto che nel corso dei calcoli gli infinitesimi come $dxdy$ o $d^2x$ debbano sparire
- Michel Rolle (*Du nouveau sistème de l'infini*, 1703): "Sembra che la caratteristica dell'esattezza non regni più in geometria da quando vi ha fatto la sua comparsa il nuovo sistema di quantità infinitesime"
- "un sistema che non ha prodotto alcuna nuova verità e spesso maschera errori"
- considerare uguali quantità che differiscono per infinitesimi
- ritenere i differenziali talvolta diversi da zero, talvolta uguali a zero

- Nel 1702 Leibniz spiega a Varignon che "non c'è affatto bisogno di far dipendere l'analisi matematica dalle controversie metafisiche né di assicurare che esistono in natura delle linee infinitamente piccole, a rigore o rispetto alle nostre, né, per conseguenza, infinitamente più grandi". Se qualcuno non le ammette come cose reali, continua Leibniz, può servirsene come delle nozioni ideali per abbreviare i ragionamenti, simili alle radici immaginarie dell'algebra.

# L'infinito: realtà matematica o finzione?

- Nel 1702 Leibniz spiega a Varignon che "non c'è affatto bisogno di far dipendere l'analisi matematica dalle controversie metafisiche né di assicurare che esistono in natura delle linee infinitamente piccole, a rigore o rispetto alle nostre, né, per conseguenza, infinitamente più grandi". Se qualcuno non le ammette come cose reali, continua Leibniz, può servirsene come delle nozioni ideali per abbreviare i ragionamenti, simili alle radici immaginarie dell'algebra.
- E ancora: "gli infiniti e gli infinitesimi sono talmente fondati che le cose accadono in geometria, e anche in natura, come se fossero delle perfette realtà, testimoni della nostra analisi geometrica". Altrove dirà che gli infinitesimi sono delle "finzioni ben fondate".

# L'infinito: realtà matematica o finzione?

- Nel 1702 Leibniz spiega a Varignon che "non c'è affatto bisogno di far dipendere l'analisi matematica dalle controversie metafisiche né di assicurare che esistono in natura delle linee infinitamente piccole, a rigore o rispetto alle nostre, né, per conseguenza, infinitamente più grandi". Se qualcuno non le ammette come cose reali, continua Leibniz, può servirsene come delle nozioni ideali per abbreviare i ragionamenti, simili alle radici immaginarie dell'algebra.
- E ancora: "gli infiniti e gli infinitesimi sono talmente fondati che le cose accadono in geometria, e anche in natura, come se fossero delle perfette realtà, testimoni della nostra analisi geometrica". Altrove dirà che gli infinitesimi sono delle "finzioni ben fondate".
- E a Fontenelle: "è vero che per me gli infiniti non sono delle totalità e gli infinitesimi non sono delle grandezze. La mia metafisica li bandisce dai suoi territori. Dà loro ricovero solo negli spazi immaginari del calcolo geometrico, dove queste nozioni sono appropriate solo come le cosiddette radici immaginarie".

# Gli infiniti: una realtà matematica

- Per secoli le dispute sulla natura dell'infinito hanno affaticato filosofi e teologi prima ancora che matematici. Cartesio riserva il nome di infinito solo a Dio, come fa Spinoza. Anche per Leibniz l'infinito è un attributo di Dio, mentre per D'Alembert "la metafisica dell'infinito e degli infinitesimi" del tutto inutile al nuovo calcolo differenziale.

# Gli infiniti: una realtà matematica

- Per secoli le dispute sulla natura dell'infinito hanno affaticato filosofi e teologi prima ancora che matematici. Cartesio riserva il nome di infinito solo a Dio, come fa Spinoza. Anche per Leibniz l'infinito è un attributo di Dio, mentre per D'Alembert "la metafisica dell'infinito e degli infinitesimi" del tutto inutile al nuovo calcolo differenziale.
- La moderna analisi matematica "una sinfonia dell'infinito", ha detto Hermann Weyl. Ma l'infinito di cui ci si occupa nel calcolo infinitesimale creato da Leibniz e Newton è l'infinito "in divenire", è l'infinito potenziale per parlare il linguaggio di Aristotele. "Non è l'infinito vero e proprio", che per Hilbert è l'infinito attuale e la teoria del transfinito di Cantor.

# Bolzano, *Paradossi dell'infinito*, (1851)

Figure: Bernhard Bolzano (1781-1848)

- Un insieme è "un aggregato di oggetti ben definiti" ovvero "un tutto composto di membri ben definiti"

Figure: Bernhard Bolzano (1781-1848)

- Un insieme è "un aggregato di oggetti ben definiti" ovvero "un tutto composto di membri ben definiti"
- Esistono insiemi infiniti? La successione dei numeri naturali, dice Bolzano, offre l'esempio pi semplice di moltitudine infinita

# Bolzano, *Paradossi dell'infinito*, (1851)

Figure: Bernhard Bolzano (1781-1848)

- Un insieme è "un aggregato di oggetti ben definiti" ovvero "un tutto composto di membri ben definiti"
- Esistono insiemi infiniti? La successione dei numeri naturali, dice Bolzano, offre l'esempio pi semplice di moltitudine infinita
- "Una particolarità altamente notevole che può presentarsi nelle relazioni tra due insiemi, quando entrambi siano infiniti, anzi, parlando propriamente, che si presenta sempre ma che è stata ignorata finora", è che essi si possano mettere in corrispondenza biunivoca

# Bolzano, *Paradossi dell'infinito*, (1851)

- Dati i segmenti *ab* e *ac*. Se *ab* è parte di *ac*, allora l'insieme dei punti di *ac* supera quello dei punti di *ab*.

Figure: Georg Cantor (1845-1918)

"Nonostante molto, forse la gran parte, sia sbagliato", il libro di Bolzano "per me è stato oltremodo stimolante, specialmente per le contraddizioni che ha suscitato in me" (Cantor a Dedekind, ottobre 1882)

# Bolzano, *Paradossi dell'infinito*, (1851)

- Dati i segmenti *ab* e *ac*. Se *ab* è parte di *ac*, allora l'insieme dei punti di *ac* supera quello dei punti di *ab*.
- L'insieme dei punti di un piano che si estende all'infinito è infinite volte più grande dell'insieme dei punti di una striscia piana compresa fra due parallele illimitate, che a sua volta è infinite volte più grande dell'insieme dei punti di un quadrato unitario

Figure: Georg Cantor (1845-1918)

"Nonostante molto, forse la gran parte, sia sbagliato", il libro di Bolzano "per me è stato oltremodo stimolante, specialmente per le contraddizioni che ha suscitato in me" (Cantor a Dedekind, ottobre 1882)

# Illimitato *vs* infinito

Bolzano, come i matematici dell'epoca, sembra considerare i termini "infinito" e "illimitato" come sinonimi. Ma le cose non stanno così, dopo che Riemann nella sua lezione di abilitazione *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (1854) ha chiarito che c'è una differenza essenziale tra semplici relazioni di estensione e relazioni metriche, differenza che rivela tutta la sua importanza "quando si estendono le costruzioni spaziali allincommensurabilmente grande". Infatti, avverte Riemann, "bisogna distinguere l'illimitato dall'infinito; l'uno appartiene alle relazioni d'estensione, l'altro alle relazioni metriche".
Che lo spazio sia illimitato è un fatto che possiede "una certezza empirica maggiore di qualsiasi esperienza esterna". Ma da ciò non deriva che sia anche infinito, anzi. Se si suppone che abbia curvatura costante, spiega Riemann, "lo spazio sarebbe necessariamente finito" non appena la curvatura avesse un valore positivo per quanto piccolo.

- All'epoca, Heine sta lavorando alla stesura dell'articolo *Sulle serie trigonometriche* (1870), un argomento che la pubblicazione (postuma, 1868) della *Habilitationsschrift* (1854) di Riemann ha reso di grande attualità.

# Un teorema di unicità, 1870

- All'epoca, Heine sta lavorando alla stesura dell'articolo *Sulle serie trigonometriche* (1870), un argomento che la pubblicazione (postuma, 1868) della *Habilitationsschrift* (1854) di Riemann ha reso di grande attualità.
- Dopo i lavori di Dirichlet e Riemann, era stato dimostrato che, sotto ipotesi di natura abbastanza generale, una funzione può essere rappresentata in serie trigonometrica come

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ma non in *quanti modi* ciò possa accadere.

# Un teorema di unicità, 1870

- All'epoca, Heine sta lavorando alla stesura dell'articolo *Sulle serie trigonometriche* (1870), un argomento che la pubblicazione (postuma, 1868) della *Habilitationsschrift* (1854) di Riemann ha reso di grande attualità.
- Dopo i lavori di Dirichlet e Riemann, era stato dimostrato che, sotto ipotesi di natura abbastanza generale, una funzione può essere rappresentata in serie trigonometrica come

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ma non in *quanti modi* ciò possa accadere.
- Tuttavia,il significato attribuito a una tale rappresentazione è in larga misura affidato alla sua unicità, ossia alla certezza che – qualunque sia il metodo adottato – si arriva sempre alla stessa serie. È questo il problema sul quale Heine attira l'attenzione del suo giovane collega, Cantor, che "ad un insolito acume unisce una fantasia assolutamente straordinaria".

Heine dimostra che se una serie trigonometrica è in generale uniformemente convergente, e rappresenta in generale lo zero, allora tutti i coefficienti $a_n, b_n$ della serie si devono annullare, e la serie rappresenta dappertutto lo zero.
Proprio riformulando questo teorema, senza l'ipotesi della convergenza uniforme, Cantor riesce a dimostrare l'unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica:

> **Teorema** *(1870) Se una funzione di una variabile reale $f(x)$ è data da una serie trigonometrica convergente per ogni valore di $x$ allora non esiste nessuna altra serie della stessa forma che converge per ogni valore di $x$ e rappresenta la funzione $f(x)$.*

Ben presto, per conferire al suo risultato maggiore generalità, egli riesce a indebolire le condizioni del teorema dimostrando che esso sussiste anche se "per certi valori della $x$ viene meno o la rappresentazione dello zero mediante la serie o la convergenza della serie". Quanti possono essere questi valori 'eccezionali'?

# L'estensione del teorema di unicità

In apertura dell'articolo *Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche* (1872) che segna una svolta nelle sue ricerche Cantor dichiara:

> *si può rinunciare alla convergenza o alla coincidenza della somma delle serie per un numero infinito di valori della $x$ nell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *senza che venga meno la validità del teorema. Allo scopo sono costretto a premettere, anche se per la maggior parte solo per cenni, alcune considerazioni utili a mettere in luce certi fatti che sempre si presentano non appena siano date delle grandezze numeriche in numero finito o infinito.*

Quelle "considerazioni" non sono altro che gli elementi essenziali della teoria cantoriana dei numeri reali.

# Numeri reali secondo Cantor

- I numeri reali sono definiti da Cantor mediante successioni 'fondamentali' di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ossia tali che per ogni $\epsilon > 0$ razionale esiste un intero $n_1$ per cui $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ per $n \geq n_1$ e $m$ intero positivo arbitario.

# Numeri reali secondo Cantor

- I numeri reali sono definiti da Cantor mediante successioni 'fondamentali' di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ossia tali che per ogni $\epsilon > 0$ razionale esiste un intero $n_1$ per cui $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ per $n \geq n_1$ e $m$ intero positivo arbitario.
- Se questa condizione è soddisfatta Cantor afferma che "*la successione ha un limite determinato* (bestimmte) $b$". (Con ciò intende che alla successione fondamentale $\{a_n\}$ è associato un simbolo $b$, evitando in questo modo un circolo vizioso, un errore logico messo in luce per prima volta da Weierstrass).

# Numeri reali secondo Cantor

- I numeri reali sono definiti da Cantor mediante successioni 'fondamentali' di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ossia tali che per ogni $\epsilon > 0$ razionale esiste un intero $n_1$ per cui $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ per $n \geq n_1$ e $m$ intero positivo arbitario.
- Se questa condizione è soddisfatta Cantor afferma che "*la successione ha un limite determinato* (bestimmte) *b*". (Con ciò intende che alla successione fondamentale $\{a_n\}$ è associato un simbolo $b$, evitando in questo modo un circolo vizioso, un errore logico messo in luce per prima volta da Weierstrass).
- Cantor considera poi successioni 'fondamentali' di numeri $\{b_n\}$ generando così, a partire dal dominio dei numeri reali $B$, un nuovo dominio numerico $C$ e, ripetendo il procedimento $\lambda$ volte, un dominio numerico $L$ di tipo $\lambda$.

# Numeri reali secondo Cantor

- I numeri reali sono definiti da Cantor mediante successioni 'fondamentali' di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ossia tali che per ogni $\epsilon > 0$ razionale esiste un intero $n_1$ per cui $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ per $n \geq n_1$ e $m$ intero positivo arbitario.
- Se questa condizione è soddisfatta Cantor afferma che "*la successione ha un limite determinato* (bestimmte) $b$". (Con ciò intende che alla successione fondamentale $\{a_n\}$ è associato un simbolo $b$, evitando in questo modo un circolo vizioso, un errore logico messo in luce per prima volta da Weierstrass).
- Cantor considera poi successioni 'fondamentali' di numeri $\{b_n\}$ generando così, a partire dal dominio dei numeri reali $B$, un nuovo dominio numerico $C$ e, ripetendo il procedimento $\lambda$ volte, un dominio numerico $L$ di tipo $\lambda$.
- "Il concetto di numero, così come è stato qui sviluppato contiene in sé il germe per una estensione infinita, in sé necessaria e assoluta".

# Numeri reali secondo Dedekind

Figure: R. Dedekind
(1831-1916

- Nello stesso periodo Dedekind sta lavorando all'opuscolo *Continuità e numeri irrazionali* (1872) in cui presenta la propria teoria dei numeri reali definiti come sezioni del campo dei razionali.

# Numeri reali secondo Dedekind

Figure: R. Dedekind (1831-1916

- Nello stesso periodo Dedekind sta lavorando all'opuscolo *Continuità e numeri irrazionali* (1872) in cui presenta la propria teoria dei numeri reali definiti come sezioni del campo dei razionali.
- Quando sta ultimando il suo opuscolo gli giunge tra le mani il lavoro di Cantor.

# Numeri reali secondo Dedekind

Figure: R. Dedekind (1831-1916

- Nello stesso periodo Dedekind sta lavorando all'opuscolo *Continuità e numeri irrazionali* (1872) in cui presenta la propria teoria dei numeri reali definiti come sezioni del campo dei razionali.
- Quando sta ultimando il suo opuscolo gli giunge tra le mani il lavoro di Cantor.
- Il campo dei numeri reali "è completo in sé", obietta Dedekind, e "non riesco a rendermi conto di quale utilità possa riuscire il distinguere, sia pure soltanto in via concettuale, numeri reali di specie superiore".
  Per Cantor, invece, a quella costruzione puramente astratta è associata una precisa interpretazione geometrica.

# Insiemi infiniti di punti

- Stabilito con un assioma che a ogni numero è associato un punto della retta, Cantor passa a studiare la natura degli insiemi di punti della retta.

# Insiemi infiniti di punti

- Stabilito con un assioma che a ogni numero è associato un punto della retta, Cantor passa a studiare la natura degli insiemi di punti della retta.
- Definisce "punto limite" [punto di accumulazione] di un insieme di punti $P$ "un punto della retta tale che in ogni suo intorno si trovano *infiniti* punti di $P$".

# Insiemi infiniti di punti

- Stabilito con un assioma che a ogni numero è associato un punto della retta, Cantor passa a studiare la natura degli insiemi di punti della retta.
- Definisce "punto limite" [punto di accumulazione] di un insieme di punti $P$ "un punto della retta tale che in ogni suo intorno si trovano *infiniti* punti di $P$".
- Per ogni insieme di punti $P$ Cantor considera poi l'insieme $P'$ ("*primo insieme di punti derivato di $P$*") definito come l'insieme dei punti-limite di $P$. Se $P'$ è un insieme infinito si può considerare il suo insieme derivato $P''$, e poi reiterare l'operazione di "derivazione", che appare l'analogo della generazione dei domini numerici $B, C, \ldots, L$, fino a ottenere un insieme di punti $P$ di $\nu$-esimo tipo (se $P^{(\nu)}$ comprende solo un numero finito di punti il suo derivato è l'insieme vuoto e l'operazione di derivazione si arresta). Per un insieme siffatto si può ancora formulare il teorema di unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica.

# Insiemi infiniti di punti

- Stabilito con un assioma che a ogni numero è associato un punto della retta, Cantor passa a studiare la natura degli insiemi di punti della retta.
- Definisce "punto limite" [punto di accumulazione] di un insieme di punti $P$ "un punto della retta tale che in ogni suo intorno si trovano *infiniti* punti di $P$".
- Per ogni insieme di punti $P$ Cantor considera poi l'insieme $P'$ ("*primo insieme di punti derivato di $P$*") definito come l'insieme dei punti-limite di $P$. Se $P'$ è un insieme infinito si può considerare il suo insieme derivato $P''$, e poi reiterare l'operazione di "derivazione", che appare l'analogo della generazione dei domini numerici $B, C, \ldots, L$, fino a ottenere un insieme di punti $P$ di $\nu$-esimo tipo (se $P^{(\nu)}$ comprende solo un numero finito di punti il suo derivato è l'insieme vuoto e l'operazione di derivazione si arresta). Per un insieme siffatto si può ancora formulare il teorema di unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica.
- Ormai, però, l'interesse da Cantor è essenzialmente rivolto agli insiemi (derivati) di punti (e agli insiemi infiniti di numeri).

# Come caratterizzare l'infinità dei numeri reali?

Figure: G. Cantor

Figure: R. Dedekind

Cantor a Dedekind (novembre 1873): Se si considera la successione dei numeri naturali 1, 2, 3, ... e la totalità dei numeri reali positivi, queste due collezioni di numeri possono essere poste in corrispondenza tra loro in modo tale che ad ogni elemento di una collezione corrisponde uno e solo uno elemento dell'altra, e viceversa? "A prima vista direi di no, che non è possibile" ma "non riesco a trovarne la ragione", confessa Cantor. Neppure Dedekind è in grado di trovarne una.

# “Differenze essenziali”

Figure: G. Cantor

Figure: R. Dedekind

Dedekind è riuscito a stabilire una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i numeri algebrici, ossia i numeri che sono soluzioni di un’equazione polinomiale di grado $n$ a coefficienti interi (poi pubblicata da Cantor). Nel dicembre 1873 Cantor riesce a provare che non esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i numeri reali. Dunque, conclude Cantor, si tratta di infinità di tipo diverso, tra loro intercorrono “differenze essenziali”.

# Un problema “ridicolo e assurdo”

Figure: G. Cantor

Figure: R. Dedekind

- “Nello stesso ordine di idee”, egli chiede ancora a Dedekind il gennaio successivo, è possibile mettere in corrispondenza biunivoca una superficie (per esempio un quadrato compreso il contorno) e una linea (per esempio un segmento estremi inclusi), in modo che a ogni punto della superficie corrisponda un punto della linea e viceversa?

# Un problema “ridicolo e assurdo”

Figure: G. Cantor

Figure: R. Dedekind

- “Nello stesso ordine di idee”, egli chiede ancora a Dedekind il gennaio successivo, è possibile mettere in corrispondenza biunivoca una superficie (per esempio un quadrato compreso il contorno) e una linea (per esempio un segmento estremi inclusi), in modo che a ogni punto della superficie corrisponda un punto della linea e viceversa?
- “Mi pare che la risposta presenti grandi difficoltà”, afferma Cantor, anche se una risposta negativa sembra così naturale da ritenere addirittura superfluo darne una dimostrazione.

# Un problema “ridicolo e assurdo”

Figure: G. Cantor

Figure: R. Dedekind

- “Nello stesso ordine di idee”, egli chiede ancora a Dedekind il gennaio successivo, è possibile mettere in corrispondenza biunivoca una superficie (per esempio un quadrato compreso il contorno) e una linea (per esempio un segmento estremi inclusi), in modo che a ogni punto della superficie corrisponda un punto della linea e viceversa?
- “Mi pare che la risposta presenti grandi difficoltà”, afferma Cantor, anche se una risposta negativa sembra così naturale da ritenere addirittura superfluo darne una dimostrazione.
- Problema ridicolo e assurdo, hanno decretato i matematici di Berlino: “va da sé che due variabili indipendenti non possono lasciarsi ridurre a una sola”.

# “Lo vedo ma non lo credo”

- Nel 1877 Cantor annuncia ancora una volta a Dedekind di aver trovato la dimostrazione che “superfici, solidi, addirittura domini continui a $n$ dimensioni si possono porre in corrispondenza (bi)univoca con linee continue, ossia domini a solo una dimensione”.

# “Lo vedo ma non lo credo”

- Nel 1877 Cantor annuncia ancora una volta a Dedekind di aver trovato la dimostrazione che “superfici, solidi, addirittura domini continui a $n$ dimensioni si possono porre in corrispondenza (bi)univoca con linee continue, ossia domini a solo una dimensione”.
- Tradito dall’entusiasmo Cantor si spinge ad affermare che “la differenza che esiste fra due domini con un numero diverso di dimensioni va cercata in tutt’altri motivi dal numero, ritenuto caratteristico, delle coordinate indipendenti”, come invece avevano ritenuto Gauss e Riemann.

# “Lo vedo ma non lo credo”

- Nel 1877 Cantor annuncia ancora una volta a Dedekind di aver trovato la dimostrazione che “superfici, solidi, addirittura domini continui a *n* dimensioni si possono porre in corrispondenza (bi)univoca con linee continue, ossia domini a solo una dimensione”.
- Tradito dall’entusiasmo Cantor si spinge ad affermare che “la differenza che esiste fra due domini con un numero diverso di dimensioni va cercata in tutt’altri motivi dal numero, ritenuto caratteristico, delle coordinate indipendenti”, come invece avevano ritenuto Gauss e Riemann.
- Nella risposta Dedekind gli fa notare che la dimostrazione presenta delle difficoltà connesse alla rappresentazione decimale di un numero dell’intervallo [0,1]. (La rappresentazione non è unica).

## “Lo vedo ma non lo credo”

- Nel 1877 Cantor annuncia ancora una volta a Dedekind di aver trovato la dimostrazione che “superfici, solidi, addirittura domini continui a *n* dimensioni si possono porre in corrispondenza (bi)univoca con linee continue, ossia domini a solo una dimensione”.
- Tradito dall’entusiasmo Cantor si spinge ad affermare che “la differenza che esiste fra due domini con un numero diverso di dimensioni va cercata in tutt’altri motivi dal numero, ritenuto caratteristico, delle coordinate indipendenti”, come invece avevano ritenuto Gauss e Riemann.
- Nella risposta Dedekind gli fa notare che la dimostrazione presenta delle difficoltà connesse alla rappresentazione decimale di un numero dell’intervallo [0,1]. (La rappresentazione non è unica).
- “Lei ha perfettamente ragione” riconosce Cantor “con qualche imbarazzo”, prima di produrre una nuova dimostrazione in cui deve far ricorso a “considerazioni più complicate”.

# “Lo vedo ma non lo credo”

- Nel 1877 Cantor annuncia ancora una volta a Dedekind di aver trovato la dimostrazione che “superfici, solidi, addirittura domini continui a $n$ dimensioni si possono porre in corrispondenza (bi)univoca con linee continue, ossia domini a solo una dimensione”.
- Tradito dall’entusiasmo Cantor si spinge ad affermare che “la differenza che esiste fra due domini con un numero diverso di dimensioni va cercata in tutt’altri motivi dal numero, ritenuto caratteristico, delle coordinate indipendenti”, come invece avevano ritenuto Gauss e Riemann.
- Nella risposta Dedekind gli fa notare che la dimostrazione presenta delle difficoltà connesse alla rappresentazione decimale di un numero dell’intervallo [0,1]. (La rappresentazione non è unica).
- “Lei ha perfettamente ragione” riconosce Cantor “con qualche imbarazzo”, prima di produrre una nuova dimostrazione in cui deve far ricorso a “considerazioni più complicate”.
- Le cose che ha comunicato all’amico, scrive ancora Cantor, “sono così nuove e inattese”, da riuscire a convincersene del tutto solo dopo aver ricevuto da Dedekind una conferma della loro correttezza. Fino ad allora potrà solo dire: “*Je le vois, mais je ne le crois pas*”.

- Dedekind conferma il risultato ma aggiunge che la corrispondenza stabilita da Cantor è discontinua mentre egli ritiene che la dimensione di uno spazio sia invariante per corrispondenze biunivoche e bi-continue (ossia continue in un verso e nell'altro).

# Potenza di un insieme

- Dedekind conferma il risultato ma aggiunge che la corrispondenza stabilita da Cantor è discontinua mentre egli ritiene che la dimensione di uno spazio sia invariante per corrispondenze biunivoche e bi-continue (ossia continue in un verso e nell'altro).
- Dedekind enuncia di fatto un teorema che sarà dimostrato solo nel nuovo secolo.

- Dedekind conferma il risultato ma aggiunge che la corrispondenza stabilita da Cantor è discontinua mentre egli ritiene che la dimensione di uno spazio sia invariante per corrispondenze biunivoche e bi-continue (ossia continue in un verso e nell'altro).
- Dedekind enuncia di fatto un teorema che sarà dimostrato solo nel nuovo secolo.
- Due insiemi hanno la stessa potenza (sono 'equipotenti') se si possono porre in corrispondenza biunivoca, afferma Cantor nell'articolo *Un contributo alla teoria degli insiemi* (1878) in cui pubblica il suo risultato.

# Potenza di un insieme

- Dedekind conferma il risultato ma aggiunge che la corrispondenza stabilita da Cantor è discontinua mentre egli ritiene che la dimensione di uno spazio sia invariante per corrispondenze biunivoche e bi-continue (ossia continue in un verso e nell'altro).
- Dedekind enuncia di fatto un teorema che sarà dimostrato solo nel nuovo secolo.
- Due insiemi hanno la stessa potenza (sono 'equipotenti') se si possono porre in corrispondenza biunivoca, afferma Cantor nell'articolo *Un contributo alla teoria degli insiemi* (1878) in cui pubblica il suo risultato.
- Il concetto di potenza di un insieme "comprende in sé come caso speciale il concetto di numero intero, fondamento della teoria delle grandezze".

# Molteplicità infinite di punti

In una serie di sei articoli dal titolo comune *Sulle molteplicità lineari infinite di punti* apparsi tra il 1879 e il 1884 Cantor presenta i risultati e i concetti della teoria degli insiemi di punti che è venuto elaborando nel corso di un decennio. In quei lavori egli precisa nozioni e proprietà – da quella di insieme derivato, insieme infinito ovunque denso, insieme aperto e chiuso, insieme perfetto e così via – che stanno alla base della moderna topologia della retta.

# L'insieme 'ternario'

- Tra i suoi risultati figura l'insieme 'ternario' che si lascia descrivere facilmente in termini geometrici.
- Dato il segmento [0,1] si divide in 3 parti uguali e si elimina il segmento centrale. Si opera poi nello stesso modo sui due segmenti rimanenti.
- Iterando indefinitamente il procedimento si ottiene la 'polvere di Cantor', nell'immaginifico linguaggio dei frattali di Mandelbrot, ossia un insieme chiuso di punti in corrispondenza biunivoca con [0,1].

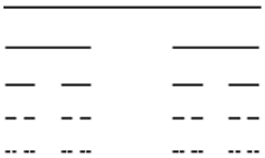


Figure: Polvere di Cantor

# Numeri ordinali transfiniti

- Nel 1883 Cantor pubblica il quinto di quegli articoli sui *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità* anche sotto forma di un opuscolo dal significativo sottotitolo "tentativo matematico-filosofico di una teoria dell'infinito".

# Numeri ordinali transfiniti

- Nel 1883 Cantor pubblica il quinto di quegli articoli sui *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità* anche sotto forma di un opuscolo dal significativo sottotitolo "tentativo matematico-filosofico di una teoria dell'infinito".
- Le sue ricerche sono giunte a un punto tale, egli confessa, che non sarebbe possibile fare "il benché minimo passo in avanti" senza estendere all'infinito il concetto di numero.

# Numeri ordinali transfiniti

- Nel 1883 Cantor pubblica il quinto di quegli articoli sui *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità* anche sotto forma di un opuscolo dal significativo sottotitolo "tentativo matematico-filosofico di una teoria dell'infinito".
- Le sue ricerche sono giunte a un punto tale, egli confessa, che non sarebbe possibile fare "il benché minimo passo in avanti" senza estendere all'infinito il concetto di numero.
- Cantor comincia con la distinzione tra infinito improprio, di una grandezza che cresce o diminuisce oltre ogni limite ma rimane sempre finita, e infinito proprio, in atto, di cui sono esempi punti, rette e piani all'infinito della geometria.

# Numeri ordinali transfiniti

- Nel 1883 Cantor pubblica il quinto di quegli articoli sui *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità* anche sotto forma di un opuscolo dal significativo sottotitolo "tentativo matematico-filosofico di una teoria dell'infinito".
- Le sue ricerche sono giunte a un punto tale, egli confessa, che non sarebbe possibile fare "il benché minimo passo in avanti" senza estendere all'infinito il concetto di numero.
- Cantor comincia con la distinzione tra infinito improprio, di una grandezza che cresce o diminuisce oltre ogni limite ma rimane sempre finita, e infinito proprio, in atto, di cui sono esempi punti, rette e piani all'infinito della geometria.
- Ogni numero naturale è ottenuto mediante ripetuta addizione di una unità (*primo principio generativo*). Cantor denota la totalità (I) dei numeri $1, 2, 3, \ldots$ con un nuovo numero $\omega$, il primo numero (ordinale) transfinito, maggiore di ogni numero $n$.

# Una seconda classe di numeri

- Applicando lo stesso 'principio generativo' a partire da $\omega$ è possibile ottenere nuovi numeri transfiniti $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$ fino a $\omega + \omega = 2\omega$ e così via iterando il ragionamento. "La funzione logica che ci ha portato ai due numeri $\omega$ e $2\omega$ la chiamo *secondo principio generativo*".

# Una seconda classe di numeri

- Applicando lo stesso ‘principio generativo’ a partire da $\omega$ è possibile ottenere nuovi numeri transfiniti $\omega+1, \omega+2, \ldots$ fino a $\omega+\omega=2\omega$ e così via iterando il ragionamento. “La funzione logica che ci ha portato ai due numeri $\omega$ e $2\omega$ la chiamo *secondo principio generativo*”.
- Con la reiterata combinazione dei due princìpi generativi, unita a un terzo principio limitativo (*Hemmungsprinzip*) Cantor definisce una seconda classe (II) di numeri che non solo ha potenza maggiore della classe (I) ma ha la potenza immediatamente successiva, ossia la classe di tutti i numeri $\alpha$

  $$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \nu_0\omega^\mu + \ldots + +\nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \alpha, \ldots$$

  con la condizione che tutti i numeri precedenti $\alpha$, a partire da 1, costituiscano un insieme con la potenza della prima classe (I) di numeri.

# Una seconda classe di numeri

- Applicando lo stesso 'principio generativo' a partire da $\omega$ è possibile ottenere nuovi numeri transfiniti $\omega+1, \omega+2, \ldots$ fino a $\omega+\omega=2\omega$ e così via iterando il ragionamento. "La funzione logica che ci ha portato ai due numeri $\omega$ e $2\omega$ la chiamo *secondo principio generativo*".
- Con la reiterata combinazione dei due princìpi generativi, unita a un terzo principio limitativo (*Hemmungsprinzip*) Cantor definisce una seconda classe (II) di numeri che non solo ha potenza maggiore della classe (I) ma ha la potenza immediatamente successiva, ossia la classe di tutti i numeri $\alpha$

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \nu_0\omega^{\mu}+\ldots++\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu}, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \alpha, \ldots$$

  con la condizione che tutti i numeri precedenti $\alpha$, a partire da 1, costituiscano un insieme con la potenza della prima classe (I) di numeri.
- Quei numeri obbediscono ad una peculiare aritmetica, in cui per es. $1+\omega=\omega$, e $1+\omega\neq\omega+1$, ossia non vale la proprietà commutativa dell'addizione (e anche della moltiplicazione).

# Buon ordinamento

- Un concetto fondamentale nella costruzione cantoriana è quello di buon ordinamento di un insieme, implicito nella successione dei numeri naturali ma definito da Cantor in generale.

# Buon ordinamento

- Un concetto fondamentale nella costruzione cantoriana è quello di buon ordinamento di un insieme, implicito nella successione dei numeri naturali ma definito da Cantor in generale.
- Un insieme è *bene ordinato* quando i suoi elementi sono disposti in una successione tale che ci sia un primo elemento dell'insieme e che ogni elemento (se non è l'ultimo) ha un ben determinato successore, e infine che ad ogni insieme finito o infinito di elementi ne appartiene uno ben determinato che è l'elemento immediatamente successivo nella successione (a meno che non ci sia nulla nella successione che li segue tutti).

# Buon ordinamento

- Un concetto fondamentale nella costruzione cantoriana è quello di buon ordinamento di un insieme, implicito nella successione dei numeri naturali ma definito da Cantor in generale.
- Un insieme è *bene ordinato* quando i suoi elementi sono disposti in una successione tale che ci sia un primo elemento dell'insieme e che ogni elemento (se non è l'ultimo) ha un ben determinato successore, e infine che ad ogni insieme finito o infinito di elementi ne appartiene uno ben determinato che è l'elemento immediatamente successivo nella successione (a meno che non ci sia nulla nella successione che li segue tutti).
- Per Cantor la nozione di buon ordinamento spiega "la differenza essenziale" tra insiemi finiti e infiniti: nel primo caso, qualunque sia l'ordinamento dato, si arriva sempre allo stesso numero ordinale (che coincide con il numero cardinale, e con la potenza); le cose non stanno così nel caso di insiemi infiniti. Mentre il concetto di potenza è indipendente dall'ordinamento, non lo è la nozione di numero ordinale.

# Buon ordinamento

- Un concetto fondamentale nella costruzione cantoriana è quello di buon ordinamento di un insieme, implicito nella successione dei numeri naturali ma definito da Cantor in generale.
- Un insieme è *bene ordinato* quando i suoi elementi sono disposti in una successione tale che ci sia un primo elemento dell'insieme e che ogni elemento (se non è l'ultimo) ha un ben determinato successore, e infine che ad ogni insieme finito o infinito di elementi ne appartiene uno ben determinato che è l'elemento immediatamente successivo nella successione (a meno che non ci sia nulla nella successione che li segue tutti).
- Per Cantor la nozione di buon ordinamento spiega "la differenza essenziale" tra insiemi finiti e infiniti: nel primo caso, qualunque sia l'ordinamento dato, si arriva sempre allo stesso numero ordinale (che coincide con il numero cardinale, e con la potenza); le cose non stanno così nel caso di insiemi infiniti. Mentre il concetto di potenza è indipendente dall'ordinamento, non lo è la nozione di numero ordinale.
- Gli insiemi corrispondenti ai numeri ordinali $\alpha$ della classe (II) hanno tutti la stessa potenza del numerabile.

# “L’essenza della matematica”

- Che tipo di realtà si può attribuire ai numeri transfiniti?

# “L’essenza della matematica”

- Che tipo di realtà si può attribuire ai numeri transfiniti?
- La risposta di Cantor è affidata alla convinzione che nel suo sviluppo la matematica è completamente libera, vincolata solo alla condizione che i nuovi concetti non siano contraddittori e in ben fissate relazioni con definizioni e concetti già esistenti e sicuri. In una parola, sostiene Cantor, “l’essenza della matematica risiede proprio nella sua libertà”.

# “L’essenza della matematica”

- Che tipo di realtà si può attribuire ai numeri transfiniti?
- La risposta di Cantor è affidata alla convinzione che nel suo sviluppo la matematica è completamente libera, vincolata solo alla condizione che i nuovi concetti non siano contraddittori e in ben fissate relazioni con definizioni e concetti già esistenti e sicuri. In una parola, sostiene Cantor, “l’essenza della matematica risiede proprio nella sua libertà”.
- Agli occhi del suo antico maestro di Berlino, il potente e autorevole Leopold Kronecker, i numeri transfiniti sono invece delle pure illusioni, se non delle vere e proprie sciocchezze, come egli ama ripetere in privato ai colleghi, convinto che in matematica siano legittime solo le operazioni algebriche su quantità finite.

# Incomprensioni

- Da anni le idee di Cantor andavano incontro all'opposizione di Kronecker, ma non solo.

# Incomprensioni

- Da anni le idee di Cantor andavano incontro all'opposizione di Kronecker, ma non solo.
- "L'impressione che producono su di noi le memorie di Cantor è desolante", scriveva Hermite, il decano dei matematici francesi, a Mittag-Leffler nell'aprile 1883. "La loro lettura sembra a tutti noi un vero e proprio supplizio" e, pur riconoscendo che egli ha aperto un nuovo campo di ricerca, "nessuno di noi  tentato di seguirlo. Ci è impossibile, tra i suoi risultati che sono comprensibili, vederne uno solo che abbia un interesse attuale; la corrispondenza tra i punti di una linea e di una superficie ci lascia assolutamente indifferenti, e pensiamo che questa osservazione, finché non se ne sarà dedotto qualcosa, risulta da considerazioni talmente arbitrarie che l'autore avrebbe fatto meglio a tenerla per sé e aspettare".

# Incomprensioni

- Da anni le idee di Cantor andavano incontro all'opposizione di Kronecker, ma non solo.
- "L'impressione che producono su di noi le memorie di Cantor è desolante", scriveva Hermite, il decano dei matematici francesi, a Mittag-Leffler nell'aprile 1883. "La loro lettura sembra a tutti noi un vero e proprio supplizio" e, pur riconoscendo che egli ha aperto un nuovo campo di ricerca, "nessuno di noi  tentato di seguirlo. Ci è impossibile, tra i suoi risultati che sono comprensibili, vederne uno solo che abbia un interesse attuale; la corrispondenza tra i punti di una linea e di una superficie ci lascia assolutamente indifferenti, e pensiamo che questa osservazione, finché non se ne sarà dedotto qualcosa, risulta da considerazioni talmente arbitrarie che l'autore avrebbe fatto meglio a tenerla per sé e aspettare".
- Nel 1884 Cantor soffrì una crisi di origine nervosa: era il primo manifestarsi di una malattia che lo costringerà a trascorrere lunghi periodi in una clinica per malattie mentali, dove morì nel 1918.

- Da anni le idee di Cantor andavano incontro all'opposizione di Kronecker, ma non solo.
- "L'impressione che producono su di noi le memorie di Cantor è desolante", scriveva Hermite, il decano dei matematici francesi, a Mittag-Leffler nell'aprile 1883. "La loro lettura sembra a tutti noi un vero e proprio supplizio" e, pur riconoscendo che egli ha aperto un nuovo campo di ricerca, "nessuno di noi  tentato di seguirlo. Ci è impossibile, tra i suoi risultati che sono comprensibili, vederne uno solo che abbia un interesse attuale; la corrispondenza tra i punti di una linea e di una superficie ci lascia assolutamente indifferenti, e pensiamo che questa osservazione, finché non se ne sarà dedotto qualcosa, risulta da considerazioni talmente arbitrarie che l'autore avrebbe fatto meglio a tenerla per sé e aspettare".
- Nel 1884 Cantor soffrì una crisi di origine nervosa: era il primo manifestarsi di una malattia che lo costringerà a trascorrere lunghi periodi in una clinica per malattie mentali, dove morì nel 1918.
- L'indifferenza se non l'ostilità con cui furono accolti i suoi lavori e la sensazione di isolamento ad Halle favorirono certo lo stato di depressione che annunciò la crisi.

# Ritorno alla matematica

- Nel 1887 Kronecker aveva rese pubbliche le sue idee nell'articolo *Sul concetto di numero*. Verrà un giorno, egli profetizzava, in cui si riuscirà a fondare l'algebra e l'intera analisi matematica "unicamente e soltanto su concetto di numero, inteso nel senso più stretto", quello di numero naturale. Come ebbe a dire una volta: "Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo".

# Ritorno alla matematica

- Nel 1887 Kronecker aveva rese pubbliche le sue idee nell'articolo *Sul concetto di numero*. Verrà un giorno, egli profetizzava, in cui si riuscirà a fondare l'algebra e l'intera analisi matematica "unicamente e soltanto su concetto di numero, inteso nel senso più stretto", quello di numero naturale. Come ebbe a dire una volta: "Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo".
- Del resto, non aveva pubblicamente liquidato la dimostrazione di Lindemann che $\pi$ è trascendente come un bell'esercizio di matematica, che tuttavia "non prova nulla dal momento che i numeri trascendenti non esistono"?

# Ritorno alla matematica

- Nel 1887 Kronecker aveva rese pubbliche le sue idee nell'articolo *Sul concetto di numero*. Verrà un giorno, egli profetizzava, in cui si riuscirà a fondare l'algebra e l'intera analisi matematica "unicamente e soltanto su concetto di numero, inteso nel senso più stretto", quello di numero naturale. Come ebbe a dire una volta: "Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo".
- Del resto, non aveva pubblicamente liquidato la dimostrazione di Lindemann che $\pi$ è trascendente come un bell'esercizio di matematica, che tuttavia "non prova nulla dal momento che i numeri trascendenti non esistono"?
- "Che la trascendenza di $e$ e $\pi$ abbia lasciato la gente indifferente significa che noi siamo abbrutiti", commenta Simone Weil col fratello André

# Ritorno alla matematica

- Nel 1887 Kronecker aveva rese pubbliche le sue idee nell'articolo *Sul concetto di numero*. Verrà un giorno, egli profetizzava, in cui si riuscirà a fondare l'algebra e l'intera analisi matematica "unicamente e soltanto su concetto di numero, inteso nel senso più stretto", quello di numero naturale. Come ebbe a dire una volta: "Dio ha creato i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo".
- Del resto, non aveva pubblicamente liquidato la dimostrazione di Lindemann che $\pi$ è trascendente come un bell'esercizio di matematica, che tuttavia "non prova nulla dal momento che i numeri trascendenti non esistono"?
- "Che la trascendenza di $e$ e $\pi$ abbia lasciato la gente indifferente significa che noi siamo abbrutiti", commenta Simone Weil col fratello André
- Nel 1891 Cantor ritorna alla matematica con una comunicazione al primo congresso della Società matematica tedesca, di cui è stato eletto presidente. Al congresso presenta una nuova dimostrazione della non-numerabilità dei numeri reali ricorrendo ad un procedimento 'diagonale'.

# Nuova dimostrazione della non-numerabilità dei numeri reali

Dati due elementi $m$ e $w$ distinti, egli considera la collezione $M$ degli elementi $E = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dove ogni $x_i$  uguale o a $m$ o a $w$. Cantor dimostra che data una qualunque successione infinita $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ di elementi di $M$, esiste sempre un elemento $E_0 \in M$ che non coincide con nessun $E_\nu$. Siano

$$E_1 = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \dots)$$
$$E_2 = (a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \dots)$$
$$\dots$$
$$E_n = (a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \dots)$$
$$\dots$$

in cui gli $a_{ik}$ sono uguali o a $m$ o a $w$ , egli considera l'elemento

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

dove, per ogni $n$, se $a_{nn} = m$ allora $b_n = w$ se invece $a_{nn} = w$ allora $b_n = m$ di modo che è sempre $b_n \neq a_{nn}$. Ne segue che $E_0$ non coincide con nessun elemento $E_n$ di $M$.

- Cantor mostra poi che l'insieme delle funzioni $f(x)$ definite sull'intervallo $[0, 1]$ che per ogni $x$ assumono il valore 0 o 1 ha potenza maggiore della potenza del continuo. In termini di cardinali, che

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

- Cantor mostra poi che l'insieme delle funzioni $f(x)$ definite sull'intervallo $[0, 1]$ che per ogni $x$ assumono il valore 0 o 1 ha potenza maggiore della potenza del continuo. In termini di cardinali, che

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

- Dunque, è possibile ottenere un sistema di potenze crescenti che "rappresentano l'unica e necessaria generalizzazione dei numeri cardinali finiti".

- Cantor mostra poi che l'insieme delle funzioni $f(x)$ definite sull'intervallo $[0, 1]$ che per ogni $x$ assumono il valore 0 o 1 ha potenza maggiore della potenza del continuo. In termini di cardinali, che

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

- Dunque, è possibile ottenere un sistema di potenze crescenti che "rappresentano l'unica e necessaria generalizzazione dei numeri cardinali finiti".
- Il sistema delle potenze così generate – dichiara Cantor – è un insieme "ben ordinato", affermazione tutt'altro che dimostrata e ripresa ancora nella grande memoria *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti* (1895 e 1897) che costituisce l'elaborazione più matura delle sue ricerche e, al tempo stesso, l'atto di nascita della teoria degli insiemi astratti.

# Dai *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti*, 1895 e 1897

- *Exergo*:

# Dai *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti*, 1895 e 1897

- *Exergo*:
- “Hypotheses non fingo” (Newton)

# Dai *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti*, 1895 e 1897

- *Exergo*:
- "Hypotheses non fingo" (Newton)
- "Non prescriviamo ad arbitrio leggi all'intelletto o alle altre cose, ma come fedeli scribi le riceviamo e le copiamo dalla voce rivelata della Natura" (Bacone)

# Dai *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti*, 1895 e 1897

- *Exergo*:
- "Hypotheses non fingo" (Newton)
- "Non prescriviamo ad arbitrio leggi all'intelletto o alle altre cose, ma come fedeli scribi le riceviamo e le copiamo dalla voce rivelata della Natura" (Bacone)
- "Verrà un giorno in cui queste cose che ora ti sono nascoste verranno alla luce" (Dal libro de *I Corinzi*).

# Dai *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti*, 1895 e 1897

- *Exergo*:
- “Hypotheses non fingo” (Newton)
- “Non prescriviamo ad arbitrio leggi all’intelletto o alle altre cose, ma come fedeli scribi le riceviamo e le copiamo dalla voce rivelata della Natura” (Bacone)
- “Verrà un giorno in cui queste cose che ora ti sono nascoste verranno alla luce” (Dal libro de *I Corinzi*).
- Un insieme (*Menge*) $M$ “è ogni riunione in un tutto di determinati e ben distinti oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero”

# Dai *Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti*, 1895 e 1897

- *Exergo*:
- “Hypotheses non fingo” (Newton)
- “Non prescriviamo ad arbitrio leggi all’intelletto o alle altre cose, ma come fedeli scribi le riceviamo e le copiamo dalla voce rivelata della Natura” (Bacone)
- “Verrà un giorno in cui queste cose che ora ti sono nascoste verranno alla luce” (Dal libro de *I Corinzi*).
- Un insieme (*Menge*) $M$ “è ogni riunione in un tutto di determinati e ben distinti oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero”
- Potenza o numero cardinale di $M$, è il “concetto generale” che si ottiene “facendo astrazione dalla natura dei suoi elementi e dall’ordine con cui sono dati”.

# La successione dei cardinali transfiniti

La teoria dei numeri cardinali offre secondo Cantor non solo “il fondamento più naturale” della teoria dei numeri finiti, ma anche quello dei numeri transfiniti. Egli definisce le operazioni sui cardinali (addizione, moltiplicazione, esponenziazione) e stabilisce le peculiari proprietà dell'aritmetica di $\aleph_0$, che denota la cardinalità della totalità dei numeri naturali 1, 2, 3, ... per cui

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0; \quad \aleph_0 \cdot n = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0; \quad \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0$$

Come applicazione di queste “semplici formule” Cantor ri-dimostra “in poche righe e in modo puramente algebrico” il risultato che, a dire di Hermite, lasciava indifferenti i matematici francesi: “il continuo n-dimensionale così come il continuo $\aleph_0$-dimensionale hanno la potenza del continuo unidimensionale”.

- La seconda parte dei *Contributi*, apparsa nel 1897, è dedicata alla teoria degli insiemi bene ordinati, i cui tipi d'ordine (i numeri ordinali) "formano il materiale naturale per una definizione precisa dei cardinali transfiniti superiori".

# Ordinali transfiniti

- La seconda parte dei *Contributi*, apparsa nel 1897, è dedicata alla teoria degli insiemi bene ordinati, i cui tipi d'ordine (i numeri ordinali) "formano il materiale naturale per una definizione precisa dei cardinali transfiniti superiori".
- Gran parte della memoria è dedicata allo studio dei numeri della seconda classe (II) ossia la classe degli ordinali di insiemi bene ordinati di cardinalità $\aleph_0$ – connesso al problema per lui dominante del continuo.

# Ordinali transfiniti

- La seconda parte dei *Contributi*, apparsa nel 1897, è dedicata alla teoria degli insiemi bene ordinati, i cui tipi d'ordine (i numeri ordinali) "formano il materiale naturale per una definizione precisa dei cardinali transfiniti superiori".
- Gran parte della memoria è dedicata allo studio dei numeri della seconda classe (II) ossia la classe degli ordinali di insiemi bene ordinati di cardinalità $\aleph_0$ – connesso al problema per lui dominante del continuo.
- Con un ragionamento che (tacitamente) fa uso dell'assioma di scelta Cantor dimostra che la classe (II) è bene ordinata e il suo numero cardinale $\aleph_1$ è il più piccolo cardinale maggiore di $\aleph_0$.

# Totalità inconsistenti

- Cantor riteneva di aver dimostrato che la successione

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

è bene ordinata e comprende tutte le cardinalità degli insiemi.

# Totalità inconsistenti

- Cantor riteneva di aver dimostrato che la successione

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

  è bene ordinata e comprende tutte le cardinalità degli insiemi.
- Lettera a Hilbert (1897): "In particolare anche la potenza $\mathbf{c}$ del continuo lineare è uguale a un determinato aleph (spero di dimostrare $\mathbf{c} = \aleph_1$)

# Totalità inconsistenti

- Cantor riteneva di aver dimostrato che la successione

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

  è bene ordinata e comprende tutte le cardinalità degli insiemi.
- Lettera a Hilbert (1897): "In particolare anche la potenza **c** del continuo lineare è uguale a un determinato aleph (spero di dimostrare $\mathbf{c} = \aleph_1$)
- "La totalità di tutti gli alephs non si lascia concepire come un insieme determinato, ben definito e al tempo stesso compiuto", dimostrando di essere consapevole delle antinomie del massimo cardinale.

# Totalità inconsistenti

- Cantor riteneva di aver dimostrato che la successione

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

  è bene ordinata e comprende tutte le cardinalità degli insiemi.
- Lettera a Hilbert (1897): "In particolare anche la potenza **c** del continuo lineare è uguale a un determinato aleph (spero di dimostrare $\mathbf{c} = \aleph_1$)
- "La totalità di tutti gli alephs non si lascia concepire come un insieme determinato, ben definito e al tempo stesso compiuto", dimostrando di essere consapevole delle antinomie del massimo cardinale.
- Lettera a Dedekind, (1899): una 'moltitudine' (*Vielheit*) "può essere costituita in modo tale che l'assunzione di uno 'stare insieme' di tutti i suoi elementi porti a una contraddizione, di modo che sia impossibile concepire la moltitudine come una unità, 'una cosa compiuta'. Tali moltitudini le chiamo assolutamente infinite o inconsistenti".

Figure: D. Hilbert (1862-1943)

- Un "teorema" che finora ha resistito agli "sforzi più assidui: "Ogni sistema infinito di numeri reali, cioè ogni insieme infinito di numeri (o di punti) è equivalente all'insieme di tutti i numeri naturali 1, 2, 3, oppure è equivalente all'insieme di tutti i numeri reali, e di conseguenza al continuo". (ipotesi del continuo di Cantor, *CH*)

Figure: D. Hilbert (1862-1943)

- Un "teorema" che finora ha resistito agli "sforzi più assidui: "Ogni sistema infinito di numeri reali, cioè ogni insieme infinito di numeri (o di punti) è equivalente all'insieme di tutti i numeri naturali 1, 2, 3, oppure è equivalente all'insieme di tutti i numeri reali, e di conseguenza al continuo". (ipotesi del continuo di Cantor, *CH*)
- "si può concepire anche il continuo come un insieme bene ordinato?" Cantor crede di sì, e sarebbe desiderabile "ottenere una dimostrazione diretta".

# Hilbert, *Sull'infinito*, 1925

Figure: D. Hilbert (1862-1943)

- "La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito sia ormai diventata necessaria *per l'onore stesso dell'intelletto umano*"

# Hilbert, *Sull'infinito*, 1925

Figure: D. Hilbert (1862-1943)

- "La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito sia ormai diventata necessaria *per l'onore stesso dell'intelletto umano*"
- "Da sempre l'infinito ha eccitato profondamente l'*animo* umano

# Hilbert, *Sull'infinito*, 1925

Figure: D. Hilbert (1862-1943)

- "La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito sia ormai diventata necessaria *per l'onore stesso dell'intelletto umano*"
- "Da sempre l'infinito ha eccitato profondamente l'*animo* umano
- "È difficile trovare un'*idea* che, più dell'infinito, abbia stimolato l'intelletto in modo così fecondo; tuttavia nessun *concetto*, più dell'infinito, ha bisogno di una *chiarificazione*"

# Hilbert, *Sull'infinito*, 1925

Figure: D. Hilbert (1862-1943)

- "La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito sia ormai diventata necessaria *per l'onore stesso dell'intelletto umano*"
- "Da sempre l'infinito ha eccitato profondamente l'*animo* umano
- "È difficile trovare un'*idea* che, più dell'infinito, abbia stimolato l'intelletto in modo così fecondo; tuttavia nessun *concetto*, più dell'infinito, ha bisogno di una *chiarificazione*"
- "Dal paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai cacciare"

# Ipotesi del continuo

- Qual è il posto da assegnare alla cardinalità $\aleph$ del continuo nella successione dei cardinali transfiniti? Cantor avanzava l'ipotesi che fosse la prima più grande di $\aleph_0$, cioè $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, in seguito generalizzata poi per ogni ordinale $\alpha$, *GCH* ossia $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

# Ipotesi del continuo

- Qual è il posto da assegnare alla cardinalità $\aleph$ del continuo nella successione dei cardinali transfiniti? Cantor avanzava l'ipotesi che fosse la prima più grande di $\aleph_0$, cioè $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, in seguito generalizzata poi per ogni ordinale $\alpha$, *GCH* ossia $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.
- Gödel (1940) dimostra che l'assioma di scelta e l'ipotesi generalizzata del continuo *GCH* sono coerenti con gli altri assiomi della teoria degli insiemi, se questi assiomi sono coerenti

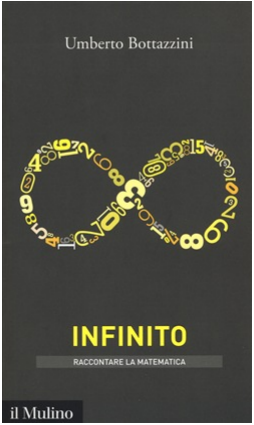
# Ipotesi del continuo

- Qual è il posto da assegnare alla cardinalità $\aleph$ del continuo nella successione dei cardinali transfiniti? Cantor avanzava l'ipotesi che fosse la prima più grande di $\aleph_0$, cioè $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, in seguito generalizzata poi per ogni ordinale $\alpha$, *GCH* ossia $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.
- Gödel (1940) dimostra che l'assioma di scelta e l'ipotesi generalizzata del continuo *GCH* sono coerenti con gli altri assiomi della teoria degli insiemi, se questi assiomi sono coerenti
- P. Cohen (1963) dimostra che *CH* non può essere derivata dagli assiomi della teoria (incluso assioma di scelta) e che quest'ultimo non può essere derivato dagli altri assiomi della teoria. Unitamente ai risultati di Gödel ciò dà "una dimostrazione completa dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di scelta".

# Ipotesi del continuo

- Qual è il posto da assegnare alla cardinalità $\aleph$ del continuo nella successione dei cardinali transfiniti? Cantor avanzava l'ipotesi che fosse la prima più grande di $\aleph_0$, cioè $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, in seguito generalizzata poi per ogni ordinale $\alpha$, *GCH* ossia $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.
- Gödel (1940) dimostra che l'assioma di scelta e l'ipotesi generalizzata del continuo *GCH* sono coerenti con gli altri assiomi della teoria degli insiemi, se questi assiomi sono coerenti
- P. Cohen (1963) dimostra che *CH* non può essere derivata dagli assiomi della teoria (incluso assioma di scelta) e che quest'ultimo non può essere derivato dagli altri assiomi della teoria. Unitamente ai risultati di Gödel ciò dà "una dimostrazione completa dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di scelta".
- Quanto alla verità o falsità, molti oggi ritengono che siano false sia l'ipotesi originaria di Cantor che quella generalizzata.

# Grazie!


Umberto Bottazzini
INFINITO
RACCONTARE LA MATEMATICA
il Mulino


Umberto Bottazzini
Istanti fatali
Quando i numeri
hanno spiegato il mondo
Editori Laterza